



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN
CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

POSTGRADO DE
SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

**UNA CONTRIBUCIÓN AL CONTROL
ESTADÍSTICO MULTIVARIADO
DE PROCESOS**

JOSÉ RODOLFO OLMOS ZEPEDA

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO

2020

La presente tesis titulada: **Una contribución al control estadístico multivariado de procesos**, realizada por el alumno: **José Rodolfo Olmos Zepeda**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

**SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA**

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO



Dr. Gustavo Ramírez Valverde

ASESOR



Dr. Paulino Pérez Rodríguez

ASESOR



Dr. Mario Cantú Sifuentes

UNA CONTRIBUCIÓN AL CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS

JOSÉ RODOLFO OLMOS ZEPEDA M. en C.
Colegio de Postgraduados, 2020

RESUMEN

En el área de la estadística, existe un conjunto de técnicas encargadas de monitorear y controlar procesos de producción conocido como Control Estadístico de Procesos (CEP). La herramienta más utilizada para estudiar el estado de un proceso en el tiempo es la carta de control. Típicamente, una carta de control es una representación gráfica del proceso que indica si éste se encuentra o no bajo control. Cuando se monitorea una característica de calidad (o variable) continua, la carta de control tipo Shewhart es la de mayor utilidad, pero si el monitoreo se realiza para dos o más variables, posiblemente correlacionadas, la herramienta de control más empleada es la carta T^2 de Hotelling. Para que su uso sea válido, en el caso univariado y multivariado, se requiere que los datos a supervisar cumplan con dos supuestos fundamentales: normalidad e independencia entre observaciones, sin embargo, ambos supuestos son difíciles de sostener en un proceso real y, en consecuencia, el rendimiento de la gráfica de control se deteriora. Algunos enfoques propuestos para enfrentar estos inconvenientes se basan en el uso de cartas de control a partir de residuales de modelos de series de tiempo o modelos de minería de datos, bootstrap y medidas de profundidad para solucionar la falta de independencia o normalidad. El enfoque de cartas de control bajo medidas de profundidad fue introducido por Regina Liu en 1995 como alternativa de gráficas de control no paramétricas o de distribución libre. La suposición básica para usar estas cartas de control es que los datos a monitorear sean independientes. En este trabajo, se propone estudiar vía simulación, a través de la longitud promedio de corrida, el comportamiento de la carta de control multivariada basada en la profundidad de Mahalanobis cuando se relaja el supuesto de normalidad multivariada en presencia de autocorrelación, esto con el fin de identificar cuán sensible es a la violación del supuesto de normalidad e independencia. Adicionalmente, se contrasta su rendimiento en esquemas comparables de simulación contra el de las cartas T^2 , MEWMA y MCUSUM. Se encontró que la carta de control no paramétrica es la única menos afectada en la mayoría de los casos examinados.

Palabras clave: Carta de control, autocorrelación, profundidad de datos, profundidad de Mahalanobis, gráfica de clasificación por rangos.

A CONTRIBUTION TO STATISTICAL MULTIVARIATE PROCESS CONTROL

JOSÉ RODOLFO OLMOS ZEPEDA M. of Sc.
Colegio de Postgraduados, 2020

ABSTRACT

In the area of statistics, there is a set of techniques responsible for monitoring and controlling production processes known as Statistical Process Control (CEP). The most used tool to study the status of a process over time is the control chart. Typically, a control letter is a graphic representation of the process that indicates whether or not it is under control. When a continuous quality (or variable) characteristic is monitored, the Shewhart control chart is the most useful, but if monitoring is performed for two or more variables, possibly correlated, the most used control tool is the T^2 Hotelling control chart. For its use to be valid, in the univariate and multivariate case, it is required that the data to be monitored to met two fundamental assumptions: normality and independence between observations, however, both assumptions are difficult to sustain in a real process and, consequently, the performance of the control chart deteriorates. Some approaches proposed to address these problems are based on the use of control charts based on residuals of time series models or data mining models, bootstrap and depth measurements to solve the lack of independence or normality. The control chart approach under depth measurements was introduced by Regina Liu in 1995 as an alternative to non-parametric control charts or free distribution. The basic assumption to use these control charts is that the data to be monitored are independent. In this work, it is proposed to study via simulation, through the average length of the run, the behavior of the multivariate control chart based on the depth of Mahalanobis when the assumption of multivariate normality is relaxed in the presence of autocorrelation, this in order to identify how sensitive it is to the violation of the assumption of normality and independence. Additionally, its performance is compared in comparable simulation schemes against that of the T^2 , MEWMA and MCUSUM charts. It was found that the non-parametric control chart is the only one less affected in most of the cases examined.

Key words: Control chart, autocorrelation, data depth, Mahalanobis depth, r -chart.

AGRADECIMIENTOS

Este momento de mi vida representa tanto el cierre de un ciclo de formación profesional de maestría, como el comienzo de un conjunto de retos que estoy dispuesto a desafiar para que se me demande ser una mejor persona y profesionalista de lo que pueda ser hasta el día de hoy. Procuraré, como depositario de ciertos conocimientos, darles a éstos seguimiento, transmitirlos de la mejor forma posible sin afanes de lucro y cuidar que, cuando la sociedad lo requiera, los utilice.

Desde luego que este trabajo no es el producto del esfuerzo solamente mío, es el reflejo del ahínco de varias personas que han estado conmigo por su voluntad propia, y confieso que, sin su invaluable compañía, constancia, dedicación y apoyo en diversos momentos, me habría sido imposible continuar y disfrutar la vida en sus distintos matices. Para ellos, en este breve espacio, expreso mi más profundo, eterno y sincero agradecimiento.

A mi padres *Rodolfo y Georgina* y a mi hermano *Rabindranath* por impulsar y darle propósito a muchas de mis acciones, muy especialmente gracias a ti papá, por ser un ejemplo a seguir, por tu incondicional amor, por aprobar mis decisiones y por orientarme sabiamente en este periodo de vida. A mis tíos *Gustavo y Margarita* y a mi prima *Quetzalli*, particularmente a ti *Quetzalli*, a quien amo más como hermana que como prima, gracias por ser la fuente de mi inspiración y serenidad. A mis abuelos *Juan y Dominga*, principalmente a ti abuelita, que aunque la vida no te permitió leer estas líneas, se que siempre supiste lo agradecido que estuve contigo por el cariño que me brindaste y por legar en mi corazón tus donaires. A *Guadalupe*, gracias por enseñarme y demostrarme tantas cosas que van más allá de estas palabras. Gracias por completar, guiar y alegrar mis días con tu amor, sonrisa y compañía, por tu apoyo, comprensión, sinceridad, paciencia y sobre todo, por ser una mujer quien sabe ser y vivir, porque así he sido un hombre más feliz, libre y pleno.

Por otra parte, quiero agradecerle al *azar* de la vida que, junto con otros aspectos coyunturales, me ha llevado a concluir que estudiar *estadística* ha sido la mejor decisión de mi vida profesional que he tomado. Lo anterior no sería del todo posible, una vez más, sin la compañía de personas que aún frecuente y de otras que el camino acercó o distanció.

Mi total gratitud a la loable labor de mi profesor y amigo Dr. *Gustavo Ramírez Valverde* que desempeñó como *consejero* y *supervisor* de este trabajo, su apoyo, honestidad y sagacidad fueron componentes claves que me impulsaron ante algunas dificultades durante mi estancia en la maestría y la elaboración de este documento.

Agradezco la amistad y consistente ayuda del Dr. *Paulino Pérez Rodríguez* quien, en diversos momentos de mi estadía como estudiante, estuvo siempre dispuesto a clarificar mis dudas de diversos temas relativos a los cursos de la maestría. También destaco su importante actividad como *asesor* de este proyecto, pues debido a sus acertadas sugerencias, aportaciones y observaciones, la realización de esta disertación culminó en buenos términos. Un cálido agradecimiento a mis amigos Dr. Mario Cantú Sifuentes y Dr. *Esteban Burguete Hernández* por aceptar fungir como *asesor* y *sinodal*, respectivamente, y haberse tomado su tiempo para revisar y retroalimentar sensiblemente este documento. Agradezco también la confianza que me brindó el Dr. Esteban Burguete y los invaluable consejos académicos y no académicos que me compartió.

Con mucho cariño, agradezco a todo el grupo tan sólido de profesores del *Departamento de Estadística*, el valioso tiempo dedicado dentro y fuera de clases para compartir conmigo sus inestimables enseñanzas y amistades. Personalmente, le doy las gracias al Dr. *José A. Villaseñor*

Alva, por incidir en mi desarrollo intelectual el antidogmatismo y la formalidad de la estadística. Asimismo, le agradezco el haberme enseñado a equilibrar la teoría estadística y matemática con la práctica apropiadamente. Extiendo igualmente un agradecimiento a los doctores *David Sotres Ramos* y *Sergio Pérez Elizalde* por confiar en mí y motivar mi entusiasmo por la docencia en estadística. También quiero hacer notable la excelente labor que realiza el sector administrativo en la coordinación del departamento, pero primordialmente, agradezco a *Isabel*, con quien siempre se puede contar, su amistad, cortesía y gallardía que permiten concluir con éxito cualquier clase de trámite académico.

Es fundamental para mí agradecer la valiosa y entrañable amistad de algunas personas que, además de compartir conmigo una variedad de experiencias en el transcurso de mi permanencia en la maestría y hacer que ésta fuera menos difícil, me brindaron sin dudarle su apoyo y su tiempo, por su gran calidad humana y profesional, gracias. A *Laura*, por su excepcional personalidad, brillantez, valentía, simpatía y cariño. A *Lizeth*, por su auténtica, entusiasta y perspicaz forma de ser, por su alegría y afabilidad. A *Abel*, por su modo de vivir tan audaz y genuino, por su ingenio y sensatez. A *Ricardo* por compartir conmigo su extensa inteligencia y humildad, y a *Yamil* por atenuar cada momento crítico con su energía, júbilo, irreverencia y humor sardónico.

A lo largo de estos dos años tuve el placer de conocer y de contar con la cercanía de distinguidos amigos. Debo admitir que sin la presencia de cada uno, no hubiese sido tan ameno, familiar y agradable mi convivencia. De manera muy especial, agradezco la amistad y la relación tan fraternal compartida con *Yeimy*, *Nilda*, *Martín* y *Yobani*, de quienes agradezco su nobleza, confianza y sencillez, sus conversaciones estimulantes, sus clases de baile, canto y deporte, sus fragorosas risas alentadoras y carismáticas formas de ser.

No puedo pasar por alto a otras amistades que también influyeron para que estudiara esta maestría, a todos ellos los conocí en la *Facultad de Estadística e Informática* de la *Universidad Veracruzana* y les guardo un singular aprecio. En particular, agradezco el meritorio y tenaz trabajo que realiza mi amiga Dra. *Julia Aurora Montano Rivas* como profesora de esa institución y como ser humano, ya que siempre ha sido una excelente consejera y una gran persona que ayuda y se preocupa por los demás.

Finalmente, pero no por eso menos importante, quiero agradecerle al *pueblo de México* que hizo posible el auspicio económico que me proporcionó el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología durante la maestría y al *Colegio de Postgraduados* su respetuoso trato en todo momento. Un último y general comentario es el siguiente: gracias a todos por su actitud siempre crítica pero constructiva, por su fe, paciencia, solidaridad y convicción depositada en mí, deseo que eventualmente pueda devolverles un poco de la grandeza que los hace únicos y pueda resarcir mis deudas personales para con todos ustedes. Este documento es un primer intento de ello, los errores que aún permanezcan aquí son sólo responsabilidad mía.

José Rodolfo Olmos
ENERO, 2020

A Guadalupe, Quetzalli, Georgina, Rabindranath y Rodolfo

“No deberíamos preguntarnos qué matemáticas podemos enseñar a un estudiante, sino cuáles contribuyen al desarrollo de su dignidad humana”

– Hans Freudentahl

“Básicamente, no estoy interesado en hacer investigación, estoy interesado en comprender, lo cual es algo muy diferente”

– David Harold Blackwell

Contenido

	Página
Resumen	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	xi
Lista de Tablas	xii
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	7
1.1.1. General	7
1.1.2. Particulares	7
1.2. Estructura de tesis	7
2. Fundamentos	8
2.1. Control estadístico de procesos multivariados	8
2.1.1. Carta de control T^2 de Hotelling	10
2.1.2. Carta de control EWMA multivariada	14
2.1.3. Carta de control CUSUM multivariada	16
2.2. Medidas de desempeño en cartas de control	19
2.2.1. Longitud promedio de corrida	19
2.3. Enfoque basado en profundidad de datos	22
2.3.1. Medida de profundidad	22
2.3.2. Cartas de control bajo medidas de profundidad	24
2.3.3. La profundidad de Mahalanobis	26
2.3.4. Carta de control r basada en la profundidad de Mahalanobis	28
3. Propuesta metodológica	31
3.1. Algunas nociones teóricas del modelo VAR	31
3.2. Simulación de datos autocorrelacionados	33
3.3. Estudio de simulación Monte Carlo	36
3.3.1. Condiciones generales de simulación	36
3.3.2. Delimitaciones	39
3.3.3. El algoritmo	41

4. Resultados y discusión	45
4.1. Resultados de la simulación	45
4.1.1. Caso Normal	45
4.1.2. Caso no Normal	48
4.1.3. Discusión de resultados	51
4.2. Ejemplo de aplicación	56
4.2.1. Descripción de los datos	56
4.2.2. Implementación de cartas de control	58
5. Conclusiones y recomendaciones	59
6. Bibliografía	61
Anexos	67
Códigos en R	67

Lista de Figuras

1.1. Ilustración de las componentes de una carta de control.	2
2.1. Ilustración de una carta de control multivariada T^2 de Hotelling ($\alpha = 0.01$). . . .	12
2.2. Ilustración de una carta de control multivariada T^2 de Hotelling ($\alpha = 0.05$). . . .	12
2.3. Ilustración de una carta de control multivariada EWMA.	16
2.4. Ilustración de una carta de control multivariada CUSUM.	18
2.5. Representación del desplazamiento de una distribución Ji-cuadrada.	21
2.6. Carta de control multivariada r basada en la profundidad de Mahalanobis para un proceso en control.	29
2.7. Carta de control multivariada r basada en la profundidad de Mahalanobis para un proceso con disminución de dispersión.	29
2.8. Carta de control multivariada r basada en la profundidad de Mahalanobis para un proceso con cambio de ubicación y aumento de dispersión.	30
3.1. Simulación de datos autocorrelacionados a partir de un modelo bivariado VAR(1).	34
3.2. Autocorrelograma y autocorrelograma parcial de los datos simulados.	35
3.3. Representación visual de autocorrelación.	35
3.4. Resumen distribucional de los datos simulados.	36
3.5. Diagnóstico de estacionariedad, autocorrelación y distribución probabilística de los datos simulados bajo la configuración de Φ_{Baja}	37
3.6. Diagnóstico de estacionariedad, autocorrelación y distribución probabilística de los datos simulados bajo la configuración de Φ_{Mixta}	38
3.7. Resumen gráfico de datos autocorrelacionados simulados con distribución Gamma bivariada.	42
3.8. Resumen gráfico de datos autocorrelacionados simulados con distribución t de Student bivariada.	43
4.1. Velocidades de flujo y potencias del generador reportadas en la BDH.	57
4.2. Distribución conjunta y univariada de las velocidades de flujo y potencias del generador reportadas en la BDH.	57
4.3. Monitoreo del proceso de energía hidroeléctrica en fase II ($\alpha = 0.0027$).	58

Lista de Tablas

2.1. Ejemplo numérico de un esquema bivariado de control MEWMA con los datos de Crosier (1988).	15
2.2. Ejemplo numérico de un esquema bivariado de control MCUSUM con los datos de Crosier (1988).	17
4.1. Valores de ARL_0 con observaciones normales bivariadas y diferentes grados de autocorrelación.	46
4.2. Valores de ARL_1 con observaciones normales bivariadas, diferentes grados de autocorrelación y magnitudes de cambio considerando $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0.9$	47
4.3. Valores de ARL_0 con observaciones t -Student bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 3$).	49
4.4. Valores de ARL_0 con observaciones t -Student bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 6$).	50
4.5. Valores de ARL_0 con observaciones t -Student bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 20$).	51
4.6. Valores de ARL_1 con observaciones t -Student bivariadas, diferentes grados de autocorrelación y magnitudes de cambio considerando $\nu = 3$ y $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0.9$	52
4.7. Valores de ARL_0 con observaciones Gamma bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 1$).	53
4.8. Valores de ARL_0 con observaciones Gamma bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 16$).	54
4.9. Valores de ARL_1 con observaciones Gamma bivariadas, diferentes grados de autocorrelación y magnitudes de cambio considerando $\nu = 1$ y $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0.9$	55
4.10. Datos históricos del ejemplo de aplicación.	56

Capítulo 1

Introducción

Una de las actividades que se presenta con mayor preponderancia, dentro del sector empresarial o industrial, es la implementación de mecanismos de control que permitan reconocer el nivel de funcionamiento con el que opera un proceso de producción. Un proceso controlado adecuadamente será más susceptible a la toma de acciones correctivas o preventivas para garantizar, con un alto nivel de confiabilidad, que un considerable número de productos finales cumplirán con ciertos parámetros de calidad establecidos.

Inherentemente, cualquier proceso de producción posee *variabilidad*, que puede deberse a *causas comunes* o *especiales*. La variabilidad inducida por fuentes comunes está atribuida al azar y a la naturaleza misma del proceso, por lo tanto, un proceso estable o en estado de control es aquel que sólo mantiene esta clase de variación. En cambio, los factores especiales (o asignables) de variabilidad están relacionados con operaciones específicas del proceso que no son del todo aleatorias, incidiendo de forma repentina en la pérdida del estado bajo control del proceso. Algunos ejemplos de causas especiales de variabilidad son, entre otros, errores de operadores, desajuste de máquinas y material defectuoso.

A fin de detectar oportunamente la ocurrencia de causas especiales y de reducir de forma continua la variabilidad generada por estas causas hasta donde sea posible, existe una colección de técnicas conocida como *Control Estadístico de Procesos* (CEP), que tuvo su inicio en 1924 con el trabajo del Dr. Walter Shewhart, donde presentó el primer boceto de la denominada *carta de control* (Mason y Young, 2002). Típicamente, una carta de control es una representación gráfica del comportamiento evolutivo de un proceso en el tiempo que muestra, analizando su variabilidad, si el proceso está o no bajo control.

Para poder describir dicho comportamiento y monitorear la implantación de la calidad en los procesos, se hace uso de una *estadística* que resuma la información de una o varias características de calidad de interés, de este modo, se tendrá una secuencia temporal de valores de esa estadística que será de utilidad para examinar la tendencia y la variabilidad del proceso. Con objeto de distinguir entre los dos tipos de variabilidad antes mencionados, se calculan unos *límites* que proporcionan un rango o intervalo de variación debido a causas comunes, así, un valor de dicha secuencia que esté fuera de tales límites, indicará que hay mayor variabilidad asociada a fuentes especiales que deben ser identificadas. Al valor responsable de esto se le conoce como *señal de fuera de control* y es usual llamar a esa estadística como *estadística de monitoreo* y a los límites como *límites de control*.

Una estadística de monitoreo puede ser, por ejemplo, un promedio muestral, una desviación estándar muestral o una proporción muestral, mientras que los límites de control son cantidades que se calculan a partir de la variabilidad y la distribución de la estadística de monitoreo. En general, las cartas de control tienen un *límite de control inferior* (LCI) y un *límite de control superior* (LCS) equidistantes de una *línea central* (LCC), que representa el valor promedio o deseado de la característica de calidad, aunque existen algunos diagramas de control que no siguen este criterio. La Figura 1.1 muestra un ejemplo típico de una carta de control basada en la filosofía del Dr. Shewhart.

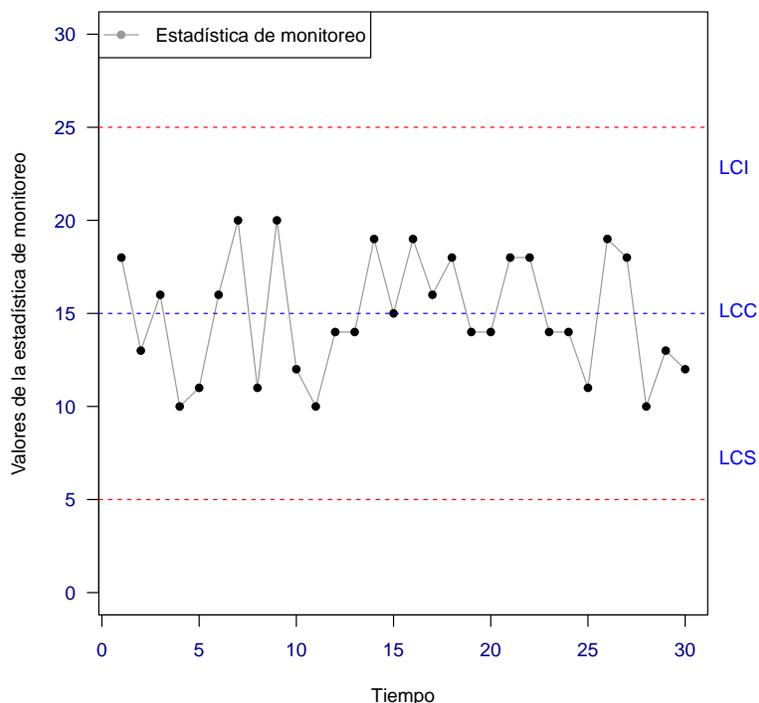


FIGURA 1.1: Ilustración de las componentes de una carta de control.

Como recién se mencionó, la distancia entre el LCI y el LCS es clave para determinar una cobertura de variabilidad común en donde el proceso se mantenga estable, no obstante, existe una probabilidad de que, aún en condiciones de control, se detecte una señal de fuera de control designada con el nombre de *falsa alarma*. En este sentido, los límites le brindan a la carta de control una característica deseable que se basa en la *detección de cambios*, es decir, que tenga la capacidad de hallar lo más pronto posible una señal de fuera de control una vez que se ha modificado el estado en control del proceso, de esta manera note que límites de control muy amplios suavizarían esa propiedad y límites muy estrechos podrían incrementar el número de falsas alarmas, en ambos casos esto es desfavorable.

Por otra parte, una gráfica de control es útil en procesos donde intervienen características de calidad de tipo cuantitativo o cualitativo, usualmente se estila llamarlas como cartas de control para *variables tipo Shewhart* o para *atributos*, respectivamente. El monitoreo puede efectuarse para una o más de una característica, por lo que también es frecuente que las cartas de control se clasifiquen en univariadas y multivariadas. Una excelente introducción sobre cartas de control univariadas y sus diversas ramificaciones puede consultarla en [Gutiérrez-Pulido y De la Vara-](#)

1. INTRODUCCIÓN

Salazar (2009).

Existen al menos dos enfoques de análisis en cartas de control para procesos con variables continuas específicamente, *paramétrico* y *no paramétrico*. Los procedimientos paramétricos se rigen bajo la suposición de que las observaciones muestreadas tengan aproximadamente *distribución Normal* y que sean *independientes* (o no *autocorrelacionadas*). Sin embargo, los procesos subyacentes difícilmente cumplen con estos supuestos, ya que a menudo en las aplicaciones reales, los datos recopilados exhiben cierta dependencia en serie y un comportamiento distribucional que no puede asumirse Normal. Básicamente, en un proceso autocorrelacionado las observaciones actuales son una función de las pasadas y las observaciones futuras de las actuales, es decir, las mediciones consecutivas no son independientes. Históricamente, son diversos los estudios que han centrado su atención en el desempeño de cartas de control univariadas cuando uno sólo de los dos supuestos mencionados no se satisface, pero en conjunto, los estudios son muy limitados.

Burr (1967) y Schilling y Nelson (1976), por ejemplo, principiaron la exploración del efecto que ocasiona la falta de la normalidad en cartas de control tipo Shewhart, hallando que la gráfica que monitorea la media de un proceso se comporta razonablemente *robusta* ante moderadas desviaciones de la normalidad. Mas tarde, Montgomery *et al.* (1999) encontraron que la carta de control de *promedios móviles exponencialmente ponderados* (EWMA), también presenta una considerable robustez para muestras no normales, y observaron, en cambio, que la carta para *observaciones individuales* si se ve seriamente afectada debido a que incrementa la proporción de falsas alarmas.

Algunas soluciones para mitigar el problema de la no normalidad incluyen, entre otras, propuestas basadas en *bootstrap* y alternativas *no paramétricas*. El primero en introducir una carta de control vía bootstrap fue Bajgier (1992), quien usó esta técnica para construir límites de control, sin embargo, su método generaba un rango de variación muy amplio entre éstos. Posteriormente, su idea fue sustancialmente afinada en las investigaciones de Seppala *et al.* (1995) y Liu y Tang (1996), aunque Jones y Woodall (1998) señalaron que las aportaciones de estos tres trabajos no mostraban mejorías significativas comparadas con las expuestas en el artículo de Schilling y Nelson (1976).

El enfoque no paramétrico o de *distribución libre* ha tenido un progreso impresionante en la construcción de cartas de control univariadas. Los precursores en este rubro fueron Bakir y Reynolds (1979), quienes dieron a conocer una carta de *sumas acumuladas* (CUSUM) basada en la estadística de rangos con signo de Wilcoxon. Años después, Altukife (2003) fabricó una gráfica de control basada en la suma de rangos, mientras que Bakir (2004) utilizó nuevamente la estadística de rangos con signo de Wilcoxon para construir cartas de control como alternativas de las cartas tipo Shewhart. Otras destacadas propuestas fueron dadas por Chakraborti y Van De Wiel (2008) y Murakami y Matsuki (2010), quienes diseñaron una carta de control apoyada en la estadística de Mann-Whitney y en la estadística de Mood, respectivamente. Una lectura completa sobre el desarrollo de los métodos no paramétricos en cartas de control univariadas puede revisarse en Chakraborti *et al.* (2001).

La presencia de autocorrelación, por otro lado, fue explorada inicialmente por Johnson y Bagshaw (1974), al detectar que la carta de control CUSUM mostraba un aumento en la proporción de falsas alarmas para observaciones autocorrelacionadas. Sin embargo, no fue hasta el trabajo de Alwan y Roberts (1988) que dio comienzo el tratamiento más conocido para enfrentar datos autocorrelacionados. Esencialmente, su propuesta consistió en ajustar a los datos del proceso un modelo de series de tiempo ARIMA y construir dos cartas de control, una llamada

carta de causas comunes y la otra, *carta de causas especiales*, la primera de ellas basada en las predicciones del modelo ajustado y la segunda en los residuales. Estudios posteriores concluyeron que el enfoque fundado en residuales de [Alwan y Roberts \(1988\)](#) tiene un mejor desempeño en comparación con las cartas tipo Shewhart, carta CUSUM y EWMA, véase, por ejemplo, [Harris y Ross \(1991\)](#), [Montgomery y Mastrangelo \(1991\)](#) y [Wardell et al. \(1992\)](#).

Aún cuando los resultados de los trabajos anteriores eran pretenciosos, [Maragah y Woodall \(1992\)](#) retomaron una perspectiva que había sido propuesta por [Vasilopoulos y Stamboulis \(1978\)](#), donde se sugería modificar los límites de control para monitorear datos autocorrelacionados directamente. Esta idea fue considerada fuertemente en los trabajos de [Schmid \(1995a\)](#), [Schmid \(1995b\)](#), [Schmid y Schone \(1997\)](#), [Schmid \(1997a\)](#), [Schmid \(1997b\)](#), [Reynolds y Van-Brackley \(1997\)](#), [Lu y Reynolds \(1999\)](#) y [Zhang \(1998\)](#), quienes en desacuerdo con el punto de vista de [Alwan y Roberts \(1988\)](#), hallaron que éste no era sensible ante cambios pequeños en el proceso y que el ajuste de límites en cartas de control tipo Shewhart, CUSUM y EWMA tenía un comportamiento superior en escenarios de autocorrelación moderada con cambios pequeños. Una discusión a detalle de éste último enfoque puede consultarse en la tesis doctoral de [Wieringa \(1999\)](#), adicionalmente, [Psarakis y Papaleonida \(2007\)](#) brindan una excelente revisión acerca de cartas de control para procesos autocorrelacionados.

Es importante tener en cuenta que si bien los procedimientos de control univariados paramétricos o no paramétricos son ampliamente utilizados en la práctica, resultan inadecuados cuando se usan para supervisar procesos que son inherentemente multivariados. En ese caso es requerible una carta de control que considere la relación existente entre las características de calidad involucradas en el proceso. Esto es de gran relevancia debido a que una modificación generada en alguna de esas características puede alterar el comportamiento de las otras ([Mason y Young, 2002](#)).

La gráfica de control más conocida y popular en el ámbito multivariado es la carta de control T^2 de Hotelling, nombrada así porque está basada en la estadística T^2 que derivó el Dr. Harold Hotelling en 1931. La carta de control fue desarrollada años más tarde por él mismo como instrumento de análisis para datos de miras en aviones de bombardeo ([Hotelling, 1947](#)). Algunas veces también es común referirse a esta gráfica como *carta de control tipo Shewhart multivariada*. A pesar de que este sistema de monitoreo es extensamente utilizado, su aplicación válida presupone distribución normalidad multivariada (NMV) e independencia, hecho que no ocurre con mucha frecuencia, por lo tanto el uso de esta carta multivariada es inapropiado en contextos donde evidentemente dichas suposiciones no pueden sostenerse.

Esto último motivó el estudio del desempeño de métodos de control multivariados, como la carta T^2 y las versiones multivariadas de las cartas CUSUM y EWMA, alrededor del incumplimiento del supuesto de la NMV o independencia. debe aclararse que estos esfuerzos han sido relativamente minoritarios en contraste con los que existen para el caso univariado, y principalmente se han dado como generalizaciones de algunas propuestas de óptica univariada. [Chou et al. \(2001\)](#), por ejemplo, detectaron que la proporción de falsas alarmas incrementa en la gráfica T^2 de Hotelling para datos individuales cuando éstos no tienen distribución NMV, señalan que el efecto de la no normalidad radica duramente en la construcción del LCS, ya que la distribución de la estadística de monitoreo, según sea el caso, es muy inexacta. Para enfrentar esta situación, proponen una carta de control multivariada no paramétrica basada en la técnica de la *estimación de densidad de kernel*. En ese mismo año, [Qiu y Hawkins \(2001\)](#) desarrollaron una extensión multivariada de la carta CUSUM tomando en cuenta rangos. [Stoumbos y Sullivan \(2002\)](#) exploraron el comporta-

1. INTRODUCCIÓN

miento de la carta EWMA multivariada y hallaron que ésta funciona bien bajo ciertas restricciones cuando los datos no provienen de una población NMV.

Zertuche-Luis (2008) presentó en su disertación de doctorado una descripción muy precisa acerca del rendimiento de la carta T^2 para datos no normales, y encontró, a través de simulación, que este procedimiento de monitoreo es incompetente en la detección de cambios. Más recientemente, la tesis doctoral de Boone (2010) proporcionó una revisión de la carta de control multivariada de rangos con signo de Wilcoxon. Posterior a esto, Boone y Chakraborti (2012) presentaron una carta multivariada no paramétrica tipo Shewhart que se basa en signos y rangos a partir de las observaciones. Otro esfuerzo interesante fue el realizado por los investigadores Kim *et al.* (2011), quienes mostraron, vía bootstrap, que la carta T^2 puede alcanzar un rendimiento considerable para datos no normales multivariados.

La autocorrelación en el caso multivariado, por su parte, fue estudiada primeramente en los escritos de Chan y Li (1994) y Charnes (1995), donde presentaron extensiones de cartas multivariadas tipo Shewhart para explicar la presencia de autocorrelación y la correlación entre variables de un proceso. Otro trabajo pionero fue el de Schmid y Kramer (1997), quienes examinaron el comportamiento de la gráfica de control EWMA para series de tiempo multivariadas. Los responsables de ampliar el enfoque de Alwan y Roberts (1988) al contexto multivariado fueron Pan (2002) y Mastrangelo y Forrest (2002). En tales artículos los autores emplearon el modelo de vectores autorregresivos (VAR) como objeto de ajuste a los datos y recomendaron utilizar los residuales del modelo aludido para supervisar el proceso. Mastrangelo y Forrest (2002) de hecho, propusieron un programa escrito en lenguaje C++ que generaba datos multivariados normales a partir de un modelo VAR *estacionario* de primer orden.

Esta estrategia también fue tomada en cuenta en la propuesta de Kalgonda y Kulkarni (2004), quienes desarrollaron una carta de control multivariada llamada *carta Z* para procesos autocorrelacionados, que además de modelar las observaciones con un proceso autorregresivo de primer orden, tenía la bondad de identificar las variables responsables del estado fuera de control. Otra contribución que considera esta idea al respecto fue la obra de Pan y Jarret (2006), los cuales construyeron una nueva gráfica de control denominada *carta VAR*, definida como una combinación de la carta univariada basada en residuales para datos autocorrelacionados y una carta multivariada para datos independientes.

Han comenzado a surgir investigaciones con líneas de estudio que no siguen algunas de las vertientes antes mencionadas, éstas han aprovechado e incorporado herramientas de *minería de datos* para diseñar novedosas cartas de control que han relajado el supuesto de independencia en las observaciones, véase, por ejemplo, Kim *et al.* (2012).

Hace poco, el artículo de Vanhatalo y Kulahci (2015) mostró que la presencia de autocorrelación positiva y negativa en los datos produce conclusiones incorrectas sobre el estado de control del proceso y que disminuye la potencia de detección de cambio sustancialmente en una gráfica T^2 . Exhiben que este inconveniente puede subsanarse ligeramente ajustando el límite de control mediante simulación. También descubrieron que la carta T^2 basada en residuales funciona mejor en general, notaron que capta cambios más rápidos y resulta ser especialmente efectiva para cambios grandes en condiciones de autocorrelación negativa. Sin embargo, observaron que el enfoque basado en residuales no es tan competitivo en el caso de autocorrelaciones positivas ni tan eficaz para detectar cambios de menor magnitud, en particular, cuando las variables tienen el mismo tamaño de cambio.

Un enfoque más, propuesto en entornos multivariados, fue realizado por la Dra. Regina Liu en 1990 al introducir un concepto que ella designó con el nombre de *profundidad de datos*, y la definió coloquialmente como una medida que brinda información sobre cuán centrado o profundo se encuentra un punto dado con respecto a una distribución multivariada (Liu, 1990). Esta noción la usó más adelante para construir un nuevo conjunto de métodos de análisis descriptivo e inferencial multivariado, que no estuviera atado a la suposición de la NVM, conceptualizado como una generalización de métodos estándar de rangos y ordenamiento univariados, véase Parelius (1997) y Liu *et al.* (1999). dentro de dichos métodos, resaltaron los orientados a cartas de control multivariadas basadas en medidas de profundidad, catalogadas por ello como no paramétricas y presentadas en Liu (1995), aunque ya en años anteriores había hecho algunas aplicaciones con artificios de profundidad de datos para control de calidad, véase también Liu (1992) y Liu y Singh (1993).

La carta de control multivariada más notable fue la basada en la *profundidad de Mahalanobis*, debido quizás a su tratable manejo computacional, sin embargo, estudios de índole teórico y práctico de ésta se exhiben en los artículos de Hamurkaroglu *et al.* (2004), Zertuche-Luis *et al.* (2004), Zertuche-Luis y Cantú-Sifuentes (2008) y Zertuche-Luis *et al.* (2008), lo cual indica que, para ser una técnica de control más pragmática, comparada con los enfoques antes señalados, es poco conocida. La única suposición bajo este esquema de control es que las observaciones provienen de una muestra aleatoria, y es escasa la información que se tiene sobre la robustez que esta carta pueda o no presentar frente a datos autocorrelacionados.

En esta dirección conviene enfatizar que no existen gráficas de control multivariadas impulsadas a resarcir los efectos del incumplimiento de los dos supuestos comentados de forma simultánea. de manera que, en el presente trabajo, se extiende un primer estudio exploratorio de la carta de control multivariada no paramétrica basada en la profundidad de Mahalanobis para datos autocorrelacionados.

Lo anterior es particularmente útil para mostrar en qué medida esta metodología, bajo condiciones muy específicas y aproximadas a la realidad, resulta ser conveniente o no para supervisar procesos multivariados no normales y autocorrelacionados. Adicionalmente, a causa del auge práctico que poseen las gráficas T^2 , EWMA y CUSUM multivariadas, se han incluido estos procedimientos de control para comparar su rendimiento en la condiciones subyacentes. Típicamente, una medida de comparación entre cartas de control es la llamada *longitud promedio de corrida* (ARL), que es el número de puntos que en promedio es necesario graficar en la carta para que ésta detecte una señal de fuera de control (Gutiérrez-Pulido y De la Vara-Salazar, 2009), de tal forma que funciona como una cantidad que mide la velocidad con la que la carta detecta un cambio.

La generación de los datos multivariados autocorrelacionados con determinada distribución estará dada a partir del modelo VAR, muy similarmente a como lo realizaron Vanhatalo y Kulahci (2015), con la sutil diferencia de que, además de considerar la distribución NMV, en este proyecto se toman en cuenta las distribuciones t de Student multivariada (t -MV) y Gamma multivariada (GMV).

1.1. Objetivos

Este estudio exploratorio comparativo sigue como directrices los siguientes objetivos.

1.1.1. General

- Evaluar el desempeño de la carta de control multivariada no paramétrica basada en la profundidad de Mahalanobis, medido en términos de ARL's, para observaciones normales, no normales y autocorrelacionadas.

1.1.2. Particulares

- Comparar el rendimiento de la carta de interés contra el de las gráficas T^2 , EWMA y CUSUM multivariadas, en condiciones donde ambos supuestos no se satisfacen.
- Generar secuencias de observaciones multivariadas con un grado de autocorrelación dado y una distribución establecida.

1.2. Estructura de tesis

En esta primera parte se ha presentado un marco muy intuitivo en lo que respecta a conceptos elementales de cartas de control, así como una breve pero general revisión de la literatura sobre cartas de control propuestas que encaran la falta de uno sólo de los supuestos sustanciales en la aplicación de gráficas de control paramétricas, ésto con la finalidad de reconocer la motivación, el problema y los objetivos de la propuesta de investigación en turno.

El capítulo 2 introduce algunos conceptos referentes a cartas de control multivariadas con mayor formalidad y expone algunos aspectos teóricos relevantes acerca de los procedimientos de control a comparar, aunque con mayor atención en el método no paramétrico y en las definiciones de medida de profundidad y ARL.

En el capítulo 3 se explica con detalle la propuesta comparativa, inicialmente se incorporan algunos términos básicos relativos al modelo VAR y posteriormente se aclaran como son generados los datos y las condiciones a los que éstos están sujetos. También se clarifica el cálculo del ARL con el cual se mide el desempeño de las cartas de control y puntos relacionados con la simulación.

Los resultados de la comparación son presentados y discutidos en el capítulo 4. Se extiende, adicionalmente, una aplicación con datos reales para ilustrar la operabilidad de las gráficas de control. Las discusiones y conclusiones sobre los resultados alcanzados en este documento se dan en el capítulo 5, del mismo modo, se sugieren algunas recomendaciones y posibilidades de líneas de investigación a futuro por desarrollar.

Finalmente, se incluye un anexo con los programas diseñados en el ambiente de trabajo R ([R Core Team, 2018](#)) para propósitos de este proyecto de tesis, los cuales se encuentran disponibles para su uso académico.

Capítulo 2

Fundamentos

En vista de que esta investigación se circunscribe en el control estadístico de procesos multivariados, este capítulo introduce algunas definiciones básicas y necesarias para el desarrollo del presente trabajo. También se revisan ciertos rudimentos teóricos de las gráficas de control multivariadas a contrastar y los términos en que puede llevarse a cabo esa comparación.

2.1. Control estadístico de procesos multivariados

Un objetivo esencial en el CEP es la *vigilancia continua* de procesos de producción basados en mediciones periódicas de algunas características o variables de artículos manufacturados para cumplir con ciertos estándares de calidad. Esta situación es parcialmente asequible por medio de una carta de control. Una carta de control es una herramienta estadística visual diseñada para el seguimiento temporal de un proceso y detectar cambios inducidos por fuentes de variación especiales asociados con algún parámetro de interés de dicho proceso, ese parámetro puede ser de *tendencia central* o de *variación*.

Un régimen muy general en la práctica de gráficas de control es dividir el periodo de monitoreo en dos fases, I y II. En la primera se desea que el proceso de interés esté en control estadístico. Para ello, a partir de datos históricos, se determinan límites de control que permiten decidir si el proceso está en control o no. De no estarlo, se excluyen los puntos fuera de control, se identifican las causas asignables responsables y se eliminan. Más tarde se incorporan nuevos datos históricos, se calculan una vez más los límites de control y se comparan con el conjunto de datos históricos actualizado. Este plan se repite hasta que el proceso se encuentre en estado de control estadístico. A la colección de datos que refleja las condiciones deseables del proceso bajo control se le conoce como *base de datos histórica* (BDH), y su distribución se utiliza como referencia (*distribución de referencia*) para el futuro monitoreo del proceso. En esta fase también se estiman los parámetros correspondientes de la distribución de referencia. El artículo de [Chakraborti et al. \(2009\)](#) brinda una amplia información sobre lo crucial que es la fase I en la construcción de cartas de control.

En la siguiente fase, con los valores estimados de la fase anterior, se calculan y se trazan los puntos de la estadística de monitoreo junto con los límites de control para supervisar si el proceso actual mantiene su estado en control a medida que se generan nuevas observaciones. Básicamente, en la segunda fase se evalúa el comportamiento del proceso con respecto a la distribución de referencia ([Marroquín-Prado y Cantú-Sifuentes, 2010](#)).

2.1. CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIADOS

Durante la fase II, el monitoreo en línea de cada nueva observación es homólogo a una *prueba de hipótesis*, donde se plantea muy genéricamente en la *hipótesis nula* H_0 : el proceso se encuentra en un estado de control, mientras que en la *hipótesis alternativa* H_1 : el proceso está fuera de control. Si el valor de la estadística de monitoreo relativa a esa nueva observación se ubica dentro de los límites de control, es equivalente a no rechazar H_0 , esto es, el proceso está bajo control, en caso contrario, rechazar la hipótesis nula implica que el proceso se ha salido de control (Montgomery, 2009).

En esta analogía pueden cometerse los *errores tipo I* y *II*. El error tipo I es concluir que el proceso está fuera de control cuando realmente no es así, es decir, es una falsa alarma. El error tipo II, por su parte, es deducir que el proceso mantiene su estado en control en el momento que no lo está. Estos dos conceptos son de suma relevancia para identificar el rendimiento de cartas de control y también para visualizar por qué es conveniente usar gráficas de control multivariadas en lugar de cartas univariadas en procesos multivariados.

Cuando se monitorea un proceso multivariado con características de calidad continuas mediante diagramas de control univariadas acontece un problema muy similar al que se presenta cuando se efectúan pruebas de hipótesis por separado en un esquema de pruebas de hipótesis múltiples, el *tamaño de prueba* general incrementa (Boone, 2010). Análogamente en gráficas de control el uso de diversas cartas univariadas en un proceso multivariado incurre en la estabilidad de la proporción global de falsas alarmas, ya que la consideración de un número grande de reglas de detección de fuera de control aumenta notablemente el número esperado total de falsas alarmas. Además, como ya se mencionó, la construcción de sistemas de control univariados en el ámbito multivariado tampoco se vale de la correlación entre las variables, por lo que ejecutar un procedimiento de control multivariado es un enfoque más conveniente (Montgomery, 2009).

El presente texto sólo hace hincapié en cartas de control para procesos multivariados con variables continuas, desde luego que esto no significa que las gráficas multivariadas para atributos sean poco importantes, de hecho son aún menos los empeños inclinados en lo concerniente al efecto que provoca el incumplimiento de los supuestos en esta clasificación, que se vuelve un tema de estudio muy alentador. Si bien se han propuesto muchos gráficos de control para datos multivariados continuos, el sistema de monitoreo más familiarizado e implementado es la T^2 de Hotelling y por propiedades de detección de cambio, también tienen su particular importancia las cartas multivariadas CUSUM y EWMA.

Mason *et al.* (1997) y Bersimis *et al.* (2007) proveen una descripción completa sobre distintas cartas de control, incluyendo las de interés en este documento, abordan de manera general un diagnóstico de los efectos que producen problemas como la violación del supuesto de la distribución NMV, la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas y la presencia de datos faltantes o autocorrelacionados. Es importante señalar que, en la mayor parte de los casos, los tres esquemas de control antes referidos intervienen cuando se desea monitorear el vector de medias de un proceso, aunque también hay esfuerzos encaminados hacia el monitoreo de la matriz de varianzas y covarianzas y ambos parámetros de forma simultánea. Adicionalmente, se usan de manera típica sobre *observaciones individuales p-variadas*, en otras palabras, con *subgrupos racionales* de tamaño igual a uno. Esto puede deberse a que la medición de las unidades es muy costosa o demanda mucho tiempo el agruparla.

La revisión de estos métodos de control que aquí se presenta asume el empleo de medidas individuales y como objeto de monitoreo al vector de medias del proceso.

2.1.1. Carta de control T^2 de Hotelling

Sin duda, el sistema de monitoreo multivariado más utilizado hasta el día de hoy es la gráfica basada en la estadística T^2 de Hotelling. Ésta fue diseñada como una extensión multivariada de la estadística t de Student por el Dr. Hotelling en 1931, y puede concebirse, *geoméricamente*, como una medida de distancia al cuadrado entre una observación multivariada y un vector de valores objetivos que toma en cuenta su estructura de varianzas y covarianzas. Mientras mayor sea esa distancia más grande es el valor de la estadística en cuestión. Generalmente, en las aplicaciones, el vector de valores objetivos está representado por el vector de medias de las p variables registradas en el proceso.

Sea \mathbf{X} un vector aleatorio de orden p definido en \mathbb{R}^p de la forma $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$, donde cada X_j , para $j = 1, 2, \dots, p$, es una variable aleatoria unidimensional definida en \mathbb{R} . Suponga que \mathbf{X} tiene distribución Normal p -variada con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$, la cual es no singular, simétrica y positiva definida. Lo anterior suele simbolizarse convencionalmente como $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}^p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Entonces, la estadística T^2 está dada por:

$$T^2 = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}). \quad (2.1)$$

Cuando los parámetros de la distribución Normal subyacente se desconocen, como sucede en casi todo momento, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son estimados mediante $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} , respectivamente, usando una BDH. En estas condiciones la estadística T^2 queda expresada como:

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}), \quad (2.2)$$

donde, dada una muestra aleatoria p -variada $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ de tamaño n en la que cada \mathbf{X}_i es un vector del tipo $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})^T$, para $i = 1, 2, \dots, n$, los estimadores $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} son:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T. \quad (2.3)$$

Un modo de reescribir a la hipótesis nula de control estadístico es, puesto que el proceso se monitorea en términos del vector de medias, planteando la hipótesis $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, la cual significa que el proceso actual supervisado sigue el comportamiento del proceso objetivo o de referencia. [Mason y Young \(2002\)](#) mostraron que, bajo H_0 , cuando $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ son conocidos, la estadística en (2.1) se distribuye Ji-cuadrada con p grados de libertad. En el caso de parámetros desconocidos, la distribución de la estadística depende de la relación entre \mathbf{X} y los estimadores $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} . Cuando \mathbf{X} es independiente de $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} se cumple que, bajo H_0 :

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \sim \left\{ \frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \right\} \cdot F_{(p, n-p)}. \quad (2.4)$$

Por el contrario, si \mathbf{X} no es independiente de $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} :

$$T^2 = (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \sim \left\{ \frac{(n-1)^2}{n} \right\} \cdot B_{(p/2, (n-p-1)/2)}. \quad (2.5)$$

Se dice que \mathbf{X} es independiente de $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} cuando \mathbf{X} no está incluida en los cálculos de $\bar{\mathbf{X}}$ y

2.1. CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIADOS

\mathbf{S} , de estarlo, se dice que es dependiente. La distribución de la estadística T^2 es particularmente útil al momento de establecer el límite de control. Este límite sólo es superior y se debe a la naturaleza misma de la estadística T^2 . Es importante resaltar que por la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas, dicha estadística es no negativa y cuando más cercana a cero está se sugiere que la distancia entre el vector de medias del proceso actual vigilado y el vector de medias de referencia es muy pequeña, lo que es por supuesto ideal. Por esta razón, un LCI no hace sentido en una carta de control T^2 , mientras que el LCS es precisamente el criterio que determina si esta distancia es lo suficientemente grande para declarar al proceso fuera de control.

El monitoreo de un proceso con este diagrama de control, como ya se mencionó, se sigue de dos fases. En la fase I, la BDH se puede obtener de la implementación de una gráfica de control T^2 que use la información de una muestra aleatoria preliminar o de entrenamiento supuestamente bajo control. Considere que tiene a esa muestra aleatoria preliminar p -variada de tamaño m con distribución Normal p -variada con vector de medias y matriz de varianzas y covarianzas desconocidos. Mason y Young (2002) recomiendan crear una gráfica T^2 conformada por los valores de la estadística en (2.2) de cada observación *contra* el tiempo y un LCS que, para un valor de α dado, se calcula de la siguiente manera:

$$\text{LCS} = \left\{ \frac{(m-1)^2}{m} \right\} \cdot B_{\{\alpha; p/2, (m-p-1)/2\}}, \quad (2.6)$$

siendo $B_{\{\alpha; p/2, (m-p-1)/2\}}$ el α -ésimo cuantil superior de la distribución Beta con parámetros $p/2$ y $(m-p-1)/2$. Si se detectan señales de fuera de control, entonces se procede a eliminar a las observaciones pertinentes, después, con las restantes, se obtienen nuevamente los estimadores y se fabrica una carta T^2 otra vez, así, el procedimiento que se deriva de la sugerencia de los autores citados, que llaman de *purgado*, es eliminar todos los datos fuera de control e iterar este esquema hasta hallar una colección de datos homogéneos de tamaño $n \leq m$ que esté bajo control estadístico. Esta colección es la BHD y su distribución será tomada como referencia para supervisar observaciones futuras.

Para la fase II suponga que toma realizaciones en línea de una muestra aleatoria actual $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, de las p variables a monitorear. Aquí, la gráfica T^2 se compone de las realizaciones de la estadística en (2.2), donde los estimadores $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} son calculados con la información de la BDH. de este modo, se trazan estos valores *contra* el tiempo y un LCS que, a diferencia de la fase I, resulta ser:

$$\text{LCS} = \left\{ \frac{p(n+1)(n-1)}{n(n-p)} \right\} \cdot F_{(\alpha; p, n-p)}, \quad (2.7)$$

en el cual $F_{(\alpha; p, n-p)}$ es el α -ésimo cuantil superior de la distribución F de Fisher-Snedecor con parámetros p y $n-p$ grados de libertad. Por lo que, en tanto los puntos de la estadística T^2 no excedan este LCS, el proceso mantendrá su estado en control. Con la finalidad de ejemplificar la visualización de un diagrama T^2 , se simularon primero 100 realizaciones de una variable aleatoria $\mathcal{N}^2(\mathbf{0}_2, \mathbf{I}_2)$, donde $\mathbf{0}_2$ es un vector de orden 2 cuyas entradas son todas iguales a 0 e \mathbf{I}_2 es la matriz de identidad de tamaño 2×2 . Posteriormente se generaron 50 observaciones con la misma distribución para ilustrar al proceso en pleno desarrollo por supervisar. Luego de encontrar los valores de la estadística T^2 y el LCS, como se muestra en las expresiones (2.2) y (2.7), respectivamente, la carta de control T^2 exhibe, para un valor de $\alpha = 0.01$, que el proceso está bajo control, véase la Figura 2.1.

2.1. CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIADOS

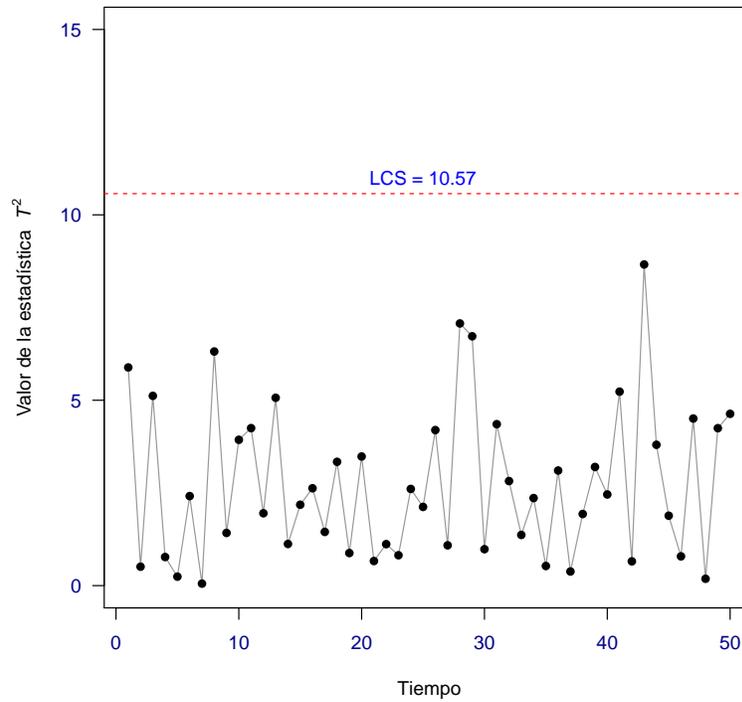


FIGURA 2.1: Ilustración de una carta de control multivariada T^2 de Hotelling ($\alpha = 0.01$).

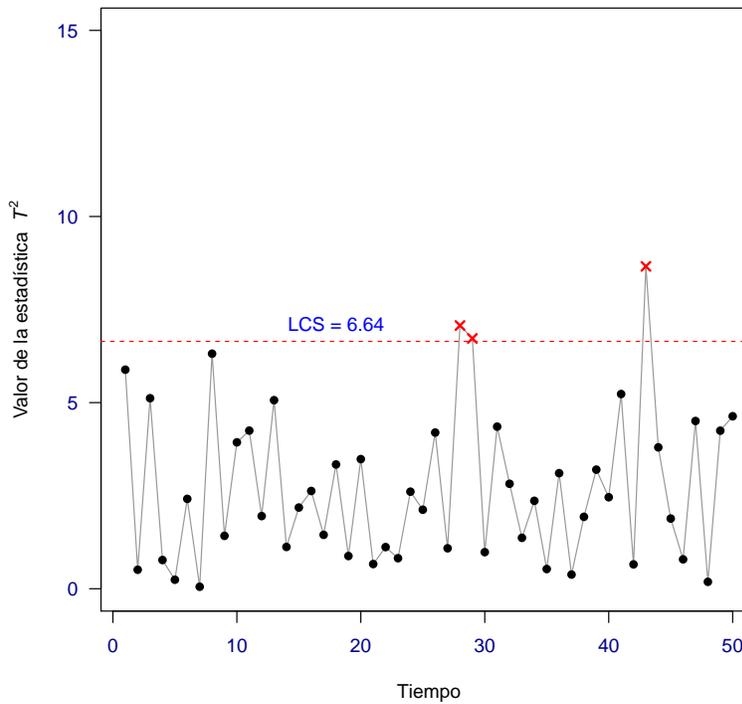


FIGURA 2.2: Ilustración de una carta de control multivariada T^2 de Hotelling ($\alpha = 0.05$).

Un aspecto muy importante de la Figura 2.1 es la selección del valor de α . En la teoría de pruebas de hipótesis, α es comúnmente conocida como la probabilidad del error tipo I, en el área del CEP también es habitual denominarla como proporción de falsas alarmas. Es interesante observar que, si se considera un valor de $\alpha = 0.05$ para determinar el LCS, la gráfica T^2 sugeriría que el proceso recién simulado está fuera de control, véase la Figura 2.2, aunque, debido a que la distribución de los datos en la fase I y II es la misma, es claro que las señales de fuera de control detectadas son sólo falsas alarmas. Por lo tanto, un LCS que tiene asociado un valor de α más pequeño, es un número más grande con respecto al que se fija para un valor de α mayor. Con regularidad se determina su valor en función de la cantidad esperada de puntos en control que se desea ver antes de hallar uno fuera de control, es decir, en función del ARL. Este procedimiento ha posibilitado la asignación de valores de α que han mostrado ser muy convenientes en la práctica. En la sección 2.2.1 se proporciona una explicación más amplia respecto al término ARL.

Por otra parte, si el resultado de un sistema de control T^2 en un proceso real adolece una situación como la que se aprecia en la Figura 2.2, esto es, no se cumplen con las especificaciones de calidad determinadas por las observaciones en la BDH, se sospecha que se ha producido un desajuste o cambio, emanado de causas especiales de variación, en el vector de medias. Sin embargo, el rastreo de la variable o variables afectadas por esta anomalía no es un aditamento de la carta T^2 . En este rubro, hay una amplia gama de métodos que facilitan la interpretación de señales de fueros de control, por ejemplo, los propuestos en los trabajos de Alt (1985), Jackson (1985), Murphy (1987), Hayter y Tsui (1994), Mason *et al.* (1995), Mason y Young (2000) y Zertuche-Luis *et al.* (2008). La mayoría de estas técnicas están basadas en descomponer ortogonalmente a la estadística T^2 en partes que reflejan la influencia individual de cada una de las variables. Probablemente, las dos técnicas más populares son la descomposición de Mason, Tracy y Young (descomposición MYT) y el análisis de componentes principales.

Es conocido, en el caso univariado, que la carta tipo Shewhart \bar{X} es particularmente rápida para identificar señales de fuera de control ante cambios grandes en la media del proceso, pero lenta en cambios de magnitud pequeña. En el caso multivariado, la gráfica T^2 también padece de ser menos sensible a cambios pequeños en el vector de medias del proceso. Esta desventaja ha sido atendida desde diferentes enfoques. Uno de ellos ha sido proponiendo otros estimadores de la matriz de varianzas y covarianzas Σ . El más conocido es, quizás, el introducido por Sullivan y Woodall (1996), dado por:

$$\mathbf{S}_d = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=2}^n (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1})(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1})^T. \quad (2.8)$$

Bajo ciertas condiciones de simulación, el estimador en (2.8) aporta en la carta T^2 un desempeño relativamente apreciable para detectar cambios pequeños, sin embargo, Chou *et al.* (1999) indicaron que \mathbf{S} sigue siendo un mejor estimador que otros, porque, además de ser un estimador de máxima verosimilitud, le brinda a este diagrama de control la bondad de ser especialmente eficaz en la detección de observaciones aberrantes, operación de suma importancia durante la fase I de su construcción. Otra alternativa sugerente, es la propuesta por Marroquín-Prado y Cantú-Sifuentes (2010), quienes presentaron una carta de control multivariada basada en la combinación de gráficas de control. Su método exhibió una mayor sensibilidad para identificar cualquier tipo de magnitud de cambio en el vector de medias, pero lamentablemente, incrementa la proporción de falsas alarmas. Una razón natural por la que estos esquemas de control, \bar{X} y T^2 , tardan mucho tiempo en detectar cambios pequeños, es por la cantidad de información histórica

del proceso que toman en cuenta, la cual es mínima, ya que sólo consideran la información de la muestra en el último tiempo. En la literatura, existe una clase de gráficas de control designadas generalmente con el nombre de *cartas de control con memoria*, porque su representación gráfica se basa en la acumulación de información muestral que el proceso proporciona, por eso es que poseen mayor sensibilidad para identificar cambios pequeños en la media del proceso. Las más distinguidas son las cartas EWMA y CUSUM con sus correspondientes versiones multivariadas. Por esta idónea propiedad, a continuación se revisan, brevemente, algunos aspectos metodológicos de las gráficas multivariadas EWMA y CUSUM.

2.1.2. Carta de control EWMA multivariada

La carta de control multivariada EWMA, o MEWMA, fue diseñada inicialmente por [Lowry et al. \(1992\)](#) como una extensión al caso multivariado de la estadística EWMA, de la cual se estriba la gráfica de control en su versión univariada. Una EWMA es, tautológicamente, una media que en cada tiempo incorpora información nueva y excluye, mediante un ponderador que decae exponencialmente, información rezagada o histórica. De aquí que sea razonable formular a la estadística EWMA en el contexto multivariado de la forma:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}_i + (\mathbf{I}_p - \mathbf{\Lambda}) \mathbf{Z}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

indicando \mathbf{Z}_i el i -ésimo vector de p valores de EWMA, \mathbf{Z}_0 es el vector $\mathbf{0}_p$ y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal de tamaño $p \times p$, cuyos elementos de la diagonal principal son parámetros que determinan el grado de *memoria* o peso que aportan las observaciones precedentes. Usualmente, estos parámetros se denotan por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, donde $0 < \lambda_j \leq 1$, para $j = 1, 2, \dots, p$, cuanto más cercano a cero esté el valor de λ , mayor importancia o ponderación tendrán las observaciones alejadas en el tiempo, con frecuencia se eligen valores de λ en el rango $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$. Un sistema de control MEWMA se implementa, por lo regular, en la fase II del monitoreo de un proceso, con la suposición de que se tenga una muestra aleatoria p -variada $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \dots$ con distribución Normal. La estadística de monitoreo propia a esta gráfica de control es:

$$T_i^2 = \mathbf{Z}_i^T \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}^{-1} \mathbf{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

en donde $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ es la matriz de varianzas y covarianzas del i -ésimo vector \mathbf{Z} . [Lowry et al. \(1992\)](#) mostraron que la (k, l) -ésima componente de esta matriz se puede calcular mediante la expresión:

$$\Sigma_{\mathbf{Z}_i}(k, l) = \lambda_k \lambda_l \times \left\{ \frac{[1 - (1 - \lambda_k)^i (1 - \lambda_l)^i]}{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_k \lambda_l} \right\} \times \sigma_{k,l}, \quad k, l = 1, 2, \dots, p, \quad (2.11)$$

siendo $\sigma_{k,l}$ el elemento (k, l) -ésimo de $\mathbf{\Sigma}$, la matriz de varianzas y covarianzas de las p variables implícitas en el proceso. Sin pérdida de generalidad, es habitual suponer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$, es decir, que todas las variables ponderan igualmente el historial del proceso, en consecuencia, la obtención de $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ se reduce a:

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \times \{1 - (1 - \lambda)^{2i}\} \times \mathbf{\Sigma}. \quad (2.12)$$

Se puede ver que, cuando i tiende a infinito, el término $(1 - \lambda)^{2i}$ de la expresión en (2.12) se aproxima a cero, por lo que $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}_i}$ puede simplificarse, asintóticamente, como:

2.1. CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIADOS

$$\Sigma_{Z_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \times \Sigma. \quad (2.13)$$

Observe que bajo la igualdad de los valores de λ , la ecuación en (2.9) cambia a:

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda) Z_{i-1}, \quad (2.14)$$

la cual al expandirse recursivamente se tiene que:

$$Z_i = \lambda X_i + \lambda(1 - \lambda) X_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 X_{i-2} + \cdots + \lambda^{i-1} (1 - \lambda) X_1 + (1 - \lambda) Z_0. \quad (2.15)$$

Esta última expresión hace un tanto intuitivo el resultado de que si $\lambda = 1$, la carta de control MEWMA es equivalente a la carta T^2 , porque de hecho, cuando $\lambda = 1$, la gráfica MEWMA sólo toma en cuenta a la muestra en el tiempo más reciente, tal y como sucede en la gráfica T^2 . Así que, una vez seleccionado un valor de λ apropiado y cuantificados los valores de la estadística de monitoreo de cada observación, la gráfica se compone de tales valores y de un LCS, denotado frecuente por H , que se establece en función del ARL que se desea obtener cuando el proceso está en control. Si alguno de estos valores está por arriba de H entonces se declara al proceso fuera de control. H es una cantidad no negativa que depende directamente de la magnitud de λ y del ARL que se espera alcanzar. La derivación de H es un tema fuera de las fronteras de este documento, pero esencialmente es hallada a través de técnicas de aproximación numérica vía simulación, especialmente cadenas de Markov y Monte Carlo. Son contados los textos que proveen de los valores óptimos de H según la configuración dada de λ , el número de variables p y el ARL, véase [Prabhu y Runger \(1997\)](#) y [Lee y Khoo \(2006b\)](#).

Para tornar a este procedimiento un poco más pragmático y facilitar su operabilidad, se ha considerado la colección de observaciones que [Crosier \(1988\)](#) simuló con el fin de ejemplificar la construcción de una gráfica MCUSUM. Su mecanismo de generación se basó en crear $n = 10$ datos bivariados distribuidos normalmente con varianzas 1 y covarianzas 0.5, la media del proceso se estableció, para los primeros cinco datos, en $\mathbf{0}_2$ y para las últimas cinco en $(1, 2)^T$. Ahora bien, suponga que fija para las dos variables el mismo peso de λ en 0.1. Después obtenga los vectores

TABLA 2.1: Ejemplo numérico de un esquema bivariado de control MEWMA con los datos de [Crosier \(1988\)](#).

Tiempo	Observaciones	Vector MEWMA	Estadística T^2	
1	-1.19	0.59 -0.12	0.06	3.29
2	0.12	0.90 -0.10	0.14	3.18
3	-1.69	0.40 -0.25	0.17	7.37
4	0.30	0.46 -0.20	0.20	5.26
5	0.89	-0.75 -0.09	0.10	1.09
6	0.82	0.98 0.00	0.19	1.28
7	-0.30	2.28 -0.03	0.40	5.66
8	0.63	1.75 0.04	0.53	8.32
9	1.56	1.58 0.19	0.64	9.64
10	1.46	3.05 0.32	0.88	17.21

Z para cada observación como se muestra en (2.14), calcule Σ_{Z_i} usando la expresión (2.12) y cuantifique la estadística T^2 señalada en (2.10). Los datos simulados y los resultados de esta metodología se exponen en la Tabla 2.1. Suponga también que aspira a que la carta MEWMA localice señales de fuera de control tal que su ARL sea aproximadamente 200. Lee y Khoo (2006b) sugieren, bajo las especificaciones dadas, que el valor óptimo de H sea $H \approx 8.64$. Este dato es sencillo de corroborar dirigiéndose a la Figura 2 del artículo recién referido, o bien consultando la Tabla 11.3 en el Capítulo 11 del libro de Montgomery (2009). Finalmente, el resultado gráfico de esta carta de control se muestra en la Figura 2.3.

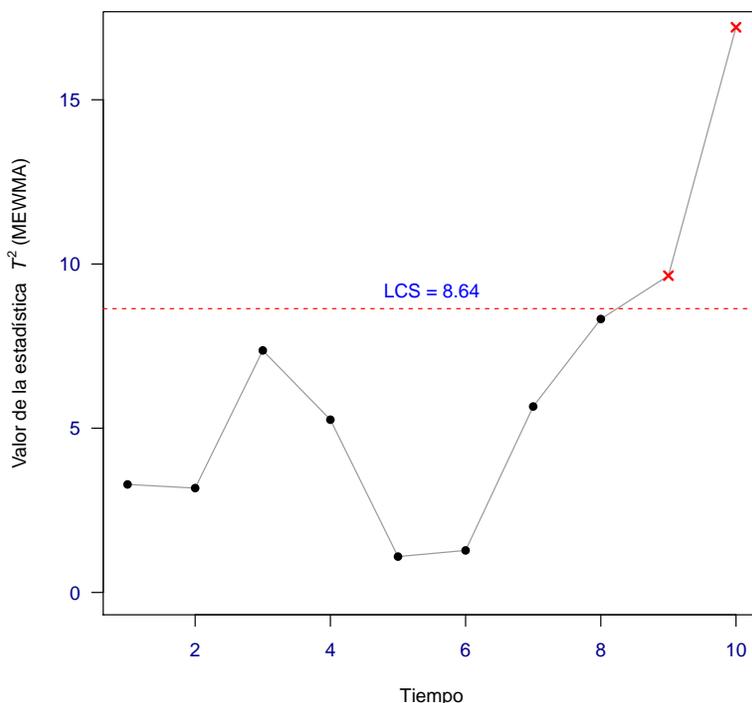


FIGURA 2.3: Ilustración de una carta de control multivariada EWMA.

Un hecho notable de la Figura 2.3 es la trayectoria creciente positiva que se aprecia a partir del séptimo tiempo, esta clase de patrón da indicios de que algún tipo de cambio sufrió el proceso a tal grado de perder su estado de control. Lo anterior es congruente con la forma en la que se simularon los datos, recuerde que las últimas cinco observaciones tienen una media más grande con respecto a las primeras cinco, por lo que la carta identificó muy prontamente el desajuste de la media en los datos.

2.1.3. Carta de control CUSUM multivariada

Ciertamente, existe más de un diseño de gráficas CUSUM en la literatura, véase, por ejemplo, Montgomery (2009) y Gutiérrez-Pulido y De la Vara-Salazar (2009). A diferencia de la carta de control EWMA, cualesquiera de estos diseños se basa en la representación de la acumulación de las desviaciones de cada observación respecto a un valor de referencia, la media tradicionalmente. Precisamente es así como la carta CUSUM considera a la información histórica. Esta misma idea se sigue en las versiones multivariadas, las cuales han sido propuestas como generalizaciones de sus configuraciones univariadas.

2.1. CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESOS MULTIVARIADOS

El esquema multivariado CUSUM, o MCUSUM, que mayor popularidad tiene por su destacado desempeño es el diseñado por [Crosier \(1988\)](#), el cual se compone de la estadística de monitoreo:

$$Y_i = \sqrt{\mathbf{s}_i^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{s}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

en donde \mathbf{s}_i es un vector de orden p dado por:

$$\mathbf{s}_i = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } C_i \leq k, \\ (\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \mathbf{a}) \cdot \left(1 - \frac{k}{C_i}\right), & \text{si } C_i > k, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

siendo:

$$C_i = \sqrt{(\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{X}_i - \mathbf{a})}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

y $\boldsymbol{\Sigma}$ en (2.16) y (2.17) la matriz de varianzas y covarianzas del proceso. \mathbf{a} es un vector de orden p que denota el punto objetivo o de referencia en el proceso, \mathbf{s}_0 es el vector $\mathbf{0}_p$ y k es una constante positiva cuyo valor recomienda [Crosier \(1988\)](#) sea de 0.5. Así como en la carta MEWMA, la gráfica MCUSUM también es puesta en marcha durante la segunda fase del monitoreo del proceso, con la suposición de que se cuenta con una muestra aleatoria p -variada $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, procedente de la distribución Normal.

En este diagrama de control, una señal de fuera de control es producida cuando algún valor de la estadística en (2.16) es superior que un LCS, también simbolizado como H , que está sujeto a la magnitud especificada del ARL y del valor de k . Nuevamente, los procedimientos que se implementan para deducir a H son básicamente por simulación. El trabajo de algunos cuantos, por ejemplo, [Crosier \(1988\)](#), [Pignatiello y Runger \(1990\)](#) y [Lee y Khoo \(2006a\)](#), ha sido de suma importancia para hallar las cantidades convenientes de H y k asociadas a un valor de ARL asequible. Con el fin de explicitar la construcción de la gráfica MCUSUM, se han retomado las observaciones de la Tabla 2.1 y se han realizado las operaciones señaladas en (2.16), (2.17) y (2.18) con $\mathbf{a} = \mathbf{0}_2$ y $k = 0.5$ para encontrar los valores de la estadística de monitoreo, los cuales se presentan en la Tabla 2.2.

TABLA 2.2: Ejemplo numérico de un esquema bivariado de control MCUSUM con los datos de [Crosier \(1988\)](#).

Tiempo	Observaciones	Vector S		Estadística Y	
1	-1.19	0.59	-0.86	0.43	1.31
2	0.12	0.90	-0.56	1.01	1.60
3	-1.69	0.40	-1.95	1.22	3.20
4	0.30	0.46	-1.40	1.43	2.83
5	0.89	-0.75	-0.30	0.39	0.69
6	0.82	0.98	0.33	0.88	0.89
7	-0.30	2.28	0.03	2.72	3.13
8	0.63	1.75	0.59	4.01	4.33
9	1.56	1.58	1.96	5.09	5.14
10	1.46	3.05	3.21	7.65	7.68

Continuando con la misma sugerencia de que la carta obtenga un ARL aproximado a 200, puede verificarse en la Tabla 1 del escrito de [Lee y Khoo \(2006a\)](#) que, para $k = 0.5$, $H \approx 5.491$. Una vez ubicadas todas las componentes para esbozar la carta de control, la Figura 2.4 revela que el proceso está fuera de control. La similaridad que guarda el comportamiento de la gráfica MCUSUM respecto al de la gráfica MEWMA es evidente, por lo que, en virtud de lo señalado en la Figura 2.3, cualquier tipo de patrón como los observados en las Figuras 2.3 y 2.4 insinuará una alteración en la media del proceso.

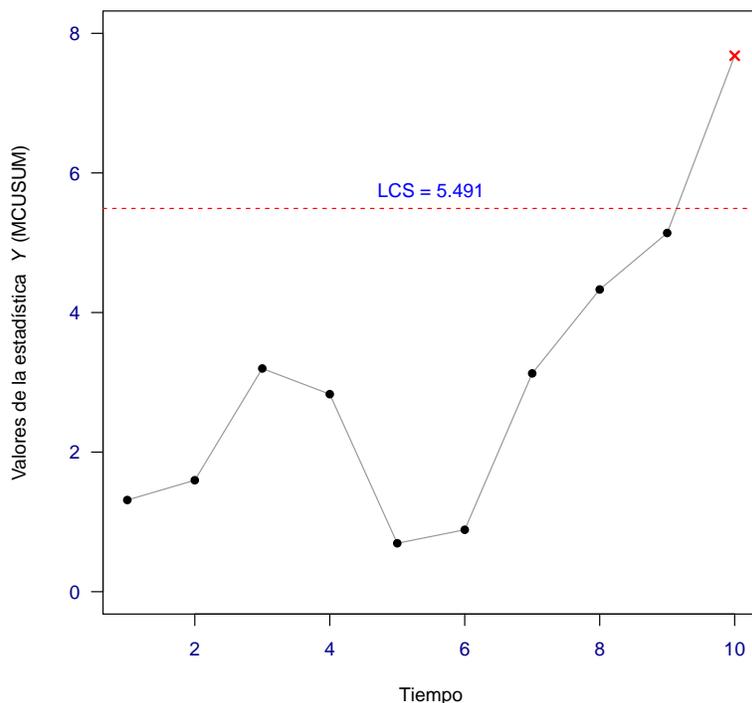


FIGURA 2.4: Ilustración de una carta de control multivariada CUSUM.

Durante la elaboración de las gráficas en las Figuras 2.3 y 2.4, se dispuso del conocimiento de Σ , sin embargo, difícilmente se posee este dato en las aplicaciones. [Mahmoud y Maravelakis \(2010, 2013\)](#) examinaron el desempeño de los diagramas MEWMA y MCUSUM cuando los parámetros del proceso se estiman a partir de una BDH, y hallaron que ambos métodos son afectados seriamente porque incrementa la proporción de falsas alarmas, esta situación es singularmente crítica cuando el número de variables inmerso es grande y el tamaño de la muestra es pequeño. Para mitigar este problema proponen límites de control, derivados de herramientas de simulación, con los cuales es posible equivaler su desempeño en el caso de parámetros conocidos y estimados.

Otras suposiciones que se infringen en la práctica son el de la normalidad e independencia. [Stoumbos y Sullivan \(2002\)](#) encontraron que aunque la carta MEWMA disminuye su eficacia para distribuciones de colas pesadas y sesgadas, resulta ser mucho más robusta que el desempeño de la carta MCUSUM, la cual es gravemente deteriorada por el aumento de falsas alarmas, véase [Nidsunkid et al. \(2018\)](#). Recientemente, [Moraesa et al. \(2015\)](#) mostraron que las gráficas MEWMA y MCUSUM también son severamente dañadas ante la presencia de autocorrelación particularmente negativa, ya que su habilidad para detectar cambios es perjudicada progresivamente.

2.2. Medidas de desempeño en cartas de control

A lo largo de la revisión de este documento, se ha hecho uso indebido del concepto ARL por sólo restringirlo a un índice que mide la rapidez de respuesta de cartas de control sin aclarar realmente como es obtenido y lo imprescindible que es para evaluar el desempeño de éstas. Una manera razonable de medir la eficacia de una gráfica de control es contando el número de puntos en control hasta antes de hallar una señal de fuera de control, a este número en la teoría de cartas de control se le llama *longitud de corrida* (RL, por sus siglas en inglés). Si se repitiera muchas veces el monitoreo de un proceso, bajo las mismas condiciones, y se obtuviera el RL en cada vez, es de suponerse que variarían esos valores, por lo que una forma de resumir esa información podría ser mediante el promedio de los RL's.

2.2.1. Longitud promedio de corrida

Cuando los puntos o valores de la estadística de monitoreo en una carta de control son independientes, el RL es una variable aleatoria, por definición, con distribución Geométrica de parámetro p , donde p es la probabilidad que tiene cada valor de estar fuera de los límites de control, en consecuencia, la longitud promedio de corrida no es más que el valor esperado de esta variable aleatoria, es decir:

$$\text{ARL} = \mathbb{E}\{\text{RL}\} = \frac{1}{p}. \quad (2.19)$$

Cuando un proceso en estado de control estadístico identifica una señal de fuera de control, el punto detectado es, como ya se ha mencionado, una falsa alarma, por lo tanto es comprensible que, para este caso, p describa la probabilidad de una falsa alarma, esto es, la probabilidad del error tipo I, de esta manera:

$$\text{ARL}_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad (2.20)$$

en donde el subíndice 0 denota que el proceso monitoreado en línea está bajo control. Cabe notar aquí que, puesto que el proceso está en control, es conveniente que la probabilidad de falsa alarma sea pequeña, en otras palabras, que el valor del ARL_0 sea grande. Ahora, si el proceso subyacente ha sufrido alguna perturbación estructural, es deseable que p informe sobre cuán probable es que un punto sea verdaderamente una señal de fuera de control que deba ser identificada (una señal de detección del cambio). En estos casos p es igual a $1 - \beta$, siendo β la probabilidad del error tipo II y $1 - \beta$ la probabilidad de detectar correctamente que el proceso no está bajo control, por lo tanto:

$$\text{ARL}_1 = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (2.21)$$

En vista de la expresión (2.21), es inmediato preferir que el ARL_1 adquiera cantidades pequeñas, puesto que $1 - \beta$ valora la potencialidad con la que el sistema de control identifica un cambio inesperado en el proceso. Tradicionalmente se les conoce a las ecuaciones en (2.20) y (2.21) como ARL en control y ARL fuera de control, respectivamente. Habiendo referido esto, el procedimiento típico que se sigue para evaluar el comportamiento de una carta de control se basa en, una vez fijado α , el número de variables p , la cantidad de observaciones y una cierta magnitud de cambio o desplazamiento, examinar si, en primer lugar, el ARL_0 es congruente con el tamaño de α establecido y si el ARL_1 reduce respecto al valor del ARL_0 ante la perturbación dada por el cambio. Es importante observar que cuando el ARL_0 es más pequeño de lo esperado, se debe a

que la proporción de falsas alarmas o la probabilidad de cometer el error tipo I ha incrementado, lo cual es no deseable. Por el contrario, si el ARL_0 es considerablemente mayor, la habilidad de detección de cambio se ve dañada, pues en ese caso, la probabilidad que ahora incrementa es la del error tipo II. De aquí la relevancia de fijar α , usualmente a un valor *pequeñito*, con la finalidad de obtener un ARL_0 conservador y un ARL_1 mínimo, lo que implica que la gráfica de control preserva un número bajo de falsas alarmas en el proceso bajo control y detecta de forma rápida si dicho proceso está fuera de control. De este modo, el desempeño y la comparación de cartas de control puede darse en función de los ARL's.

Se acepta en la práctica como un valor razonable para α de 0.0027, por consiguiente, $ARL_0 = 1/0.0027 \approx 370$, esto significa que en promedio, por cada 370 puntos, la carta localiza una falsa alarma cuando el proceso está bajo control. Por lo que toca a los cambios en el análisis del ARL_1 , éstos suelen presentarse como desplazamientos de múltiplos de las desviaciones estándar de las variables correspondientes en el parámetro de monitoreo de interés. Estos desplazamientos pueden ser de la misma o diferente dimensión, aunque es común que se estudie el caso en donde la magnitud de cambio es la misma para todas las variables. Otra manera de representar la magnitud de un cambio, particularmente en contextos multivariados, es mediante el conocido *parámetro de no centralidad* (Lowry *et al.*, 1992) expresado como:

$$\lambda = \sqrt{(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)}, \quad (2.22)$$

donde $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\boldsymbol{\Sigma}_0$ son el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas del proceso en control y $\boldsymbol{\mu}_1$ el vector de medias del proceso desplazado. Este parámetro ejerce un rol crucial durante el diseño óptimo de cartas control, de hecho, los ARL's de las tres gráficas antes revisadas, bajo condiciones generales, dependen directamente de este parámetro de no centralidad. A fin de esclarecer un poco este concepto, Mason y Young (2002) ilustran el siguiente planteamiento: suponga que conoce los parámetros $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\boldsymbol{\Sigma}_0$ de una distribución Normal p -variada. Como ya se mencionó, la región de control para un vector \mathbf{X} de orden p en control, en términos de la estadística T^2 , que se puede describir mediante la distribución Ji-cuadrada con p grados de libertad, está dada por:

$$T^2 = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0) < \text{LCS} = \chi_{\alpha, p}^2. \quad (2.23)$$

Un modo más específico de referirse a la distribución Ji-cuadrada es con el nombre de Ji-cuadrada *central*, ya que la distribución del vector $(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_0)$ es Normal p -variada con media $\mathbf{0}$. Enseguida considere a \mathbf{Y} que se distribuye Normal p -variada con parámetros $\boldsymbol{\mu}_1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_0$, note que la estadística T^2 de \mathbf{Y} es:

$$T^2 = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_1)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_1), \quad (2.24)$$

pero sería inapropiado describirla por medio de una distribución Ji-cuadrada central, debido a que la media de la distribución Normal p -variada del vector $(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_0)$ es diferente de $\mathbf{0}$. No obstante, se puede establecer la media del vector $(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_0)$ usando $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\boldsymbol{\mu}_1$ de la forma:

$$(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_0) = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) = \{(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_1) + \boldsymbol{\gamma}\}, \quad (2.25)$$

siendo $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)$ la expresión del cambio medio. Entonces a partir de la ecuación (2.25):

$$T^2 = \{(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_1) + \boldsymbol{\gamma}\}^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \{(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_1) + \boldsymbol{\gamma}\} \sim \chi_{(p, \delta)}^2, \quad (2.26)$$

2.2. MEDIDAS DE DESEMPEÑO EN CARTAS DE CONTROL

en donde $\chi_{(p,\delta)}^2$ denota la distribución Ji-cuadrada *no central* con p grados de libertad y parámetro de no centralidad $\delta = \lambda^2$, donde λ es la expresión señalada en (2.22). Este esquema puede representarse visualmente como se observa en la Figura 2.5.

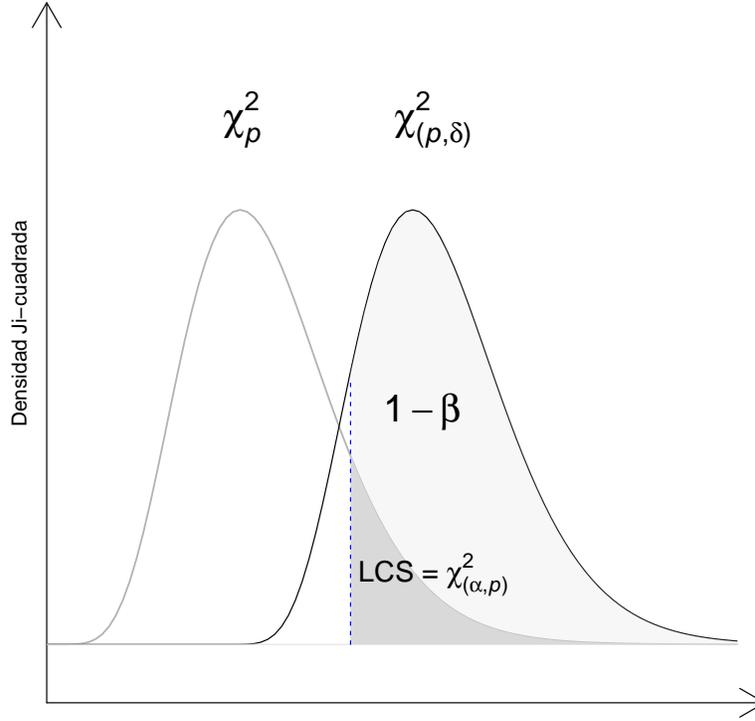


FIGURA 2.5: Representación del desplazamiento de una distribución Ji-cuadrada.

Continuado con la misma idea, el interés ahora es calcular la probabilidad de detectar ese cambio, es decir, $1 - \beta$, la cual, por la Figura 2.5, resulta ser la integral (Mason y Young, 2002):

$$\mathbb{P}(\text{Detección de cambio}) = 1 - \beta = \int_{LCS}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta/2} (\delta/2)^i}{i!} f_{(2i+p)}(w) dw, \quad (2.27)$$

indicado $f_{(2i+p)}(w)$ la función de densidad de la distribución Ji-cuadrada con $2i + p$ grados de libertad y $LCS = \chi_{(\alpha;p,\delta)}^2$. Este ejemplo motiva la necesidad de métodos de simulación para el cálculo de integrales como la expresada en (2.27) y para el estudio de los ARL's en general, donde el tratamiento analítico asociado con la obtención de los ARL's es más complicado, consecuente también del incumplimiento de los supuestos de normalidad e independencia. De estos métodos los más imperantes en la literatura son Monte Carlo, cadenas de Markov y ecuaciones integrales, véase, por ejemplo Prabhu y Runger (1996), Schaffer y Kim (2007). Finalmente, algunos autores no están del todo conformes con el uso de la media para brindar información sobre el RL. Palm (1990), por ejemplo, muestra que las distribuciones del RL son regularmente muy sesgadas, por lo que el ARL no debería emplearse como una medida única del rendimiento de una carta, en cambio, la mediana o cualquier otro percentil, según sea el interés, podrían ser mejores representantes de dicha distribución. Lee y Khoo (2006a,b), por ejemplo, propusieron un diseño óptimo de gráficas MCUSUM y MEWMA empleando la mediana de las longitudes de corrida (MRL).

2.3. Enfoque basado en profundidad de datos

El análisis estadístico de datos multivariados es una de las áreas que mayor permea en las aplicaciones de la vida real, ya que muchos de los experimentos y estudios ejecutados en ciencias agrícolas, sociales e industriales, por ejemplo, son de naturaleza multivariada. Un obstáculo que limita a esta área en la práctica es, con frecuencia, la dificultad de justificar la suposición de la distribución NMV, aún después de haber transformado los datos o haber rechazado la hipótesis de normalidad en un esquema de prueba de hipótesis adecuado. Esta situación fue lo que impulsó el desarrollo de nuevas herramientas que no tomaran en cuenta un comportamiento distribucional particular en el vector aleatorio de variables a analizar.

El trabajo de un grupo de investigadores, entre los que destacan Regina Liu, Jeese Parelius, Kesar Singh, hizo posible que a lo largo de la década de los 90, algunas técnicas no paramétricas multivariadas fuesen respaldadas teóricamente bajo el concepto de *profundidad de datos*. Estas técnicas pueden percibirse como una extensión de métodos univariados de ordenamiento y de clasificación por rangos a problemas de dimensión mayor, redituando en rangos de tipo *centro-exterior* construidos a través de una medida o función de profundidad. Las primeras adaptaciones de este enfoque ocurrieron de la mano del control de la calidad en los trabajos de Liu (1992) y Liu y Singh (1993), dándose a conocer formalmente las primeras cartas de control multivariadas hasta el escrito de Liu (1995).

2.3.1. Medida de profundidad

El concepto de profundidad de datos se desarrolló a partir del problema de generalizar la mediana univariada y ordenar conjuntos de datos multivariados. Esta demanda fue atendida de forma pionera por Tukey (1975) y Barnett (1976), quienes airoosamente sentaron las primeras bases de una mediana p -variada vista como el punto más profundo en una nube de datos en \mathbb{R}^p y de sistemas de ordenamiento multivariado. De hecho, anecdóticamente, Tukey fue el primero en usar la palabra profundidad.

Intuitivamente, una medida de profundidad es una función que da cuenta de la cercanía que tiene un dato multivariado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ respecto al centro de una distribución conocida o respecto al centro de una nube de datos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Desde una óptica un poco más formal, para una distribución multivariada absolutamente continua H definida en \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, una función de profundidad, denotada por $D(H; \mathbf{x})$, es una función que asigna un rango no negativo en el intervalo $[0, 1]$ que provee un orden del centro hacia afuera de un punto dado \mathbf{x} basado en H . Esta noción de profundidad sugiere que valores altos o bajos de $D(H; \mathbf{x})$ posicionan a \mathbf{x} más cerca o alejado, respectivamente, del centro de H , lo cual produce un sistema natural de orden, generalmente decreciente, donde el punto más central se ubica en primer lugar y el más periférico en último lugar. Este ordenamiento también induce un esquema de clasificación por rangos, en el cual, el rango más pequeño tiene asociado al punto con la menor profundidad y el rango más grande corresponderá al punto con la profundidad máxima. Observe entonces que el valor de $D(H; \mathbf{x})$ podría interpretarse como la *localización* o el *grado de centralidad* de \mathbf{x} con base en H .

El concepto de función de profundidad de datos se puede formalizar estableciendo una serie de propiedades que ésta debe satisfacer, además de ser no negativa y acotada, para la evaluación de funciones de profundidad que proporcionen eficientemente un orden tipo centro-exterior.

Las propiedades que aquí se presentan son una versión simplificada de las que aparecen, por

ejemplo, en [Zuo y Serfling \(2000\)](#) y [Serfling \(2006\)](#).

PROPIEDAD 1. *Invarianza afín.* Sea \mathbf{A} una matriz de tamaño $p \times p$ no singular, \mathbf{b} un vector orden p en \mathbb{R}^p y $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ una transformación del dato \mathbf{x} . Si H y $H_{\mathbf{Ax} + \mathbf{b}}$ son las distribuciones de \mathbf{x} y del dato transformado, respectivamente, entonces:

$$D(H_{\mathbf{Ax} + \mathbf{b}}; \mathbf{Ax} + \mathbf{b}) = D(H; \mathbf{x}), \quad (2.28)$$

lo que significa que el valor de la profundidad de \mathbf{x} no depende de su escala de medición, puesto este valor que es el mismo que el da profundidad de los datos transformados en forma afín.

PROPIEDAD 2. *Maximalidad al centro.* Para una distribución H que tiene un único centro $\boldsymbol{\vartheta}_0$, definido bajo alguna noción de simetría¹, la función de profundidad de \mathbf{x} debe alcanzar el valor máximo en ese centro, esto es:

$$D(H; \boldsymbol{\vartheta}_0) = \max_{\mathbf{x}} D(H; \mathbf{x}). \quad (2.29)$$

PROPIEDAD 3. *Monotonidad relativa al punto más profundo.* A medida que \mathbf{x} se aleja del punto más profundo, es decir, del punto en el que la función de profundidad alcanza el valor máximo, a lo largo de cualquier segmento que une a \mathbf{x} con dicho punto, la profundidad en \mathbf{x} deberá ser monótona decreciente. Esto quiere decir que, cuando H es simétrica alrededor de $\boldsymbol{\vartheta}_0$ y alcanza allí su profundidad el valor máximo, entonces $D(H; \mathbf{x})$ es monótona respecto del punto de máxima profundidad si:

$$D(H; \mathbf{x}) \leq D(H; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \xi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\vartheta}_0)), \quad (2.30)$$

para cualquier $\xi \in [0, 1]$.

PROPIEDAD 4. *Desvanecimiento al infinito.* La profundidad de un punto \mathbf{x} deberá aproximarse a cero tanto como $\|\mathbf{x}\|$ se aproxime a infinito.

Fundamentalmente, una medida de profundidad que cumple con estas cuatro propiedades ofrece una satisfactoria solución para formar un orden multivariado de los datos, que por lo visto de su definición, [Barnett \(1976\)](#) cataloga como un *orden reducido*, ya que una función de profundidad reduce un dato multivariado a valores individuales utilizando alguna métrica de distancia. Estas métricas también pueden ser de *atipicidad* (*outlyingness* en inglés) o de cercanía (*closness* en inglés), que de acuerdo con [Mosler \(2002\)](#), están relacionadas inversamente con una función de profundidad. [Zuo y Serfling \(2000\)](#) presentan un esquema de clasificación general de funciones de profundidad en términos de estas métricas y [Mosler \(2013\)](#) extendió esta clasificación en tres tipos de profundidad, las basadas en *distancias*, en *medias ponderadas* y en *semi-espacios*.

Las basadas en distancias definen usando una distancia desde un punto central, marcado adecuadamente, a otro punto dado. En el segundo tipo las profundidades son determinadas mediante regiones específicas de un punto medio ponderado apropiadamente. Y en el tercer tipo, la profundidad está implícita en semi-espacios o en espacios geométricos relativamente más complejos que se refieren sólo a la estructura combinatoria de los datos. A las dos primeras clases de profundidades se les conoce también como *profundidades-métricas*, mientras que a la última clase se le conoce como *profundidades-combinatoria*. Estos enfoques son particularmente útiles al momento de distinguir las capacidades teóricas de cada medida de profundidad y su

¹Diríjase a [Zuo y Serfling \(2000\)](#) para consultar algunas ideas generales de simetría multivariada.

tratamiento computacional para analizar e interpretar conjuntos de datos de cierta dimensión. Rafalin y Souvaine (2004) hacen notar que las profundidades-combinatoria padecen de no ser computacionalmente eficientes en dimensiones superiores, pues aunque la cúspide informática en estos tiempos es ostentoso, la complejidad computacional de estas funciones de profundidad crece exponencialmente respecto a la dimensión de los datos y esto evita que sean útiles en el análisis práctico para dimensiones mayores o iguales a tres. Algunos esfuerzos que intentaron menguar este inconveniente, pero son poco estudiados y prevalecidos se encuentran en los escritos de Rousseeuw y Strufy (1998) y Miller *et al.* (2003). Las profundidades métricas, en contraste, son menos complicadas de cuantificar en cualquier dimensión. Algunos nombres de medidas de profundidad mencionados con frecuencia en aplicaciones son, entre otras, la profundidad de Mahalanobis, la profundidad simplicial, la profundidad de Tukey, la profundidad mayoritaria de Singh y la profundidad zonoide (Liu *et al.*, 2004).

Debido a la naturaleza misma que poseen las medidas de profundidad en resumir mediciones multivariadas en índices univariados que caracterizan la ubicación centro-exterior de un conjunto de datos, Liu y Singh (1993) propusieron implementar una estadística derivada de funciones de profundidad con la finalidad de examinar y comparar la periferia de una población multivariada en relación con otra, la cual trasladó al esquema que se plantea durante la fase II de monitoreo en una gráfica de control para verificar si el proceso que está siendo supervisado cumple o no con las características prescritas en la distribución de referencia, dicho de otro modo, si el proceso está o no bajo control, y puesto que el concepto de medida de profundidad no requiere de suposiciones sobre la forma de la distribución subyacente de las observaciones, es que se considera este planteamiento como un enfoque no paramétrico de cartas de control.

2.3.2. Cartas de control bajo medidas de profundidad

Suponga que $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m$ es una muestra aleatoria p -variada de una distribución $H \in \mathbb{R}^p$ producida por un proceso en estado de control, es decir, H es la distribución de referencia. Considere a $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, una muestra aleatoria actual de las p variables en monitoreo, donde cada \mathbf{X}_i se distribuye $G^2 \in \mathbb{R}^p$. El objetivo es determinar, con base en las observaciones de las \mathbf{X}_i , si el proceso aún está en condiciones de control. La directriz que Liu y Singh (1993) recomiendan seguir para monitorear el proceso basándose en la noción de profundidad de datos es el cálculo de una estadística clasificadora de rangos, asociada a cada nueva observación, que está dada por la comparación de las profundidades de los datos en G respecto a las profundidades de los datos en control de H , esto es:

$$r_H(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(D(H; \mathbf{Y}) \leq D(H; \mathbf{x}) \mid \mathbf{Y} \sim H). \quad (2.31)$$

La expresión en (2.31) es particularmente útil cuando H se conoce, sin embargo a menudo H es desconocida, en este caso:

$$r_{H_m}(\mathbf{x}) = \frac{\#\{\mathbf{Y}_j \mid D(H_m; \mathbf{Y}_j) \leq D(H_m; \mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, m\}}{m + 1}, \quad (2.32)$$

que denota la probabilidad o proporción de puntos, bajo la distribución de referencia, que son más periféricos que el dato \mathbf{x} , en otras palabras, la proporción de observaciones en la muestra de referencia que tienen una medida de profundidad que no excede a la del dato \mathbf{x} . Ahora bien,

² G también es absolutamente continua e independiente de H .

2.3. ENFOQUE BASADO EN PROFUNDIDAD DE DATOS

si el valor del rango hallado es alto entonces hay un número muy grande de observaciones de referencia que son más periféricas que \mathbf{x} , esto significa que la profundidad del dato actual es muy grande y se sospecha que hay altas posibilidades de que este dato pertenezca a la distribución de referencia, en consecuencia, se sugiere que el proceso está bajo control. De lo contrario, si el rango es muy pequeño se debe a que la nueva observación tiene una profundidad muy pequeña o es muy periférica, por lo que habrá una cantidad muy baja de datos de referencia que sean más periféricos que el dato monitoreado, lo cual indica que este dato no corresponde a la distribución de referencia y es preferible establecer al proceso fuera de control. Este rudimento de representar una observación multivariada por su correspondiente rango relativo $r_{H_m}(\mathbf{x})$ es la base de algunos diseños de cartas de control análogos a las gráficas MCUSUM, MEWMA y \bar{X} que han sido propuestos como métodos alternativos ante el incumplimiento del supuesto de normalidad, véase, por ejemplo, Liu (2003), Liu *et al.* (2004) y Dai *et al.* (2004).

Liu y Singh (1993) demostraron que, bajo el hecho de que $G = H$, si la distribución de $D(H; \mathbf{Y})$ es continua, entonces la distribución de $r_H(\mathbf{X})$ es Uniforme con soporte en el intervalo $[0, 1]$, más aún, cuando $m \rightarrow \infty$, $r_{H_m}(\mathbf{X})$ converge en distribución a una variable aleatoria distribuida $U[0, 1]$ siempre que $D_{H_m}(\cdot)$ converja uniformemente a $D_H(\cdot)$. La verificación del primer resultado es trivial y se sigue directamente del Teorema de la transformación de distribución de probabilidad.

Por lo anterior, un esquema de control conveniente podría ser basándose directamente en el monitoreo de los rangos $r_{H_m}(\mathbf{x}_i)$ y en la elección apropiada de un límite de control inferior que juzgue cuan pequeño debe ser el valor del rango para detectar una señal de fuera de control. Dada la distribución de la estadística de monitoreo, es razonablemente justificable que se use como LCI a la proporción de falsas alarmas y una LC igual a 0.5. Observe que la existencia de un LCS no hace sentido a causa de la interpretación que tienen los valores grandes de $r_{H_m}(\mathbf{x})$. Liu (1995) aclara que cuando el valor del rango es muy cercano a 1 ocurre un virtual cambio de ubicación poco apreciable o reducción en la dispersión de los datos monitoreados respecto a los de referencia que puede verse como una cierta mejoría del proceso, a diferencia de cuando el valor de $r_{H_m}(\mathbf{x})$ es más pequeño que la LC, en donde el comportamiento regular del proceso comienza a deteriorarse por una posible perturbación de ubicación o incremento de dispersión. Este deterioro se agudiza una vez que $r_{H_m}(\mathbf{x})$ es inferior que un $\text{LCI} = \alpha$ dado, momento en el cual se declara al proceso fuera de control. A pesar de que no se considera un LCS, por lo visto, la LC funciona como un punto de referencia que valúa la formación de patrones o tendencias en una secuencia observaciones (Liu, 1995).

A este procedimiento descrito arriba le concierne el nombre de *carta de control r* o de *clasificación por rangos* y ha sido el más preponderante cuando de aplicaciones no paramétricas se trata, véase, por ejemplo, Hamurkaroglu *et al.* (2004), Zertuche-Luis *et al.* (2004) y Messaoud *et al.* (2005). La clave de hacer implementable y eficaz este método de control está en el uso de una medida de profundidad que sea poco intensiva computacionalmente y atractiva desde un punto de vista teórico. Como ya se mencionó, las profundidades métricas se pueden calcular en conjuntos de datos sin distinción de su dimensión. La más popular de éstas es la *profundidad de Mahalanobis*, propuesta por Liu y Singh (1993), y debe su nombre al hecho de que su definición se basa en la famosa distancia de Mahalanobis, además, es muy sencilla de calcular y satisface las cuatro propiedades anteriormente expuestas.

Con el propósito de visualizar la construcción de una gráfica de control r , se empleará en este trabajo la profundidad de Mahalanobis, la cual se revisa a continuación.

2.3.3. La profundidad de Mahalanobis

La profundidad de Mahalanobis de punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, con respecto a la distribución H , se define de la forma:

$$M_h D(H; \mathbf{x}) = \{1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_H)^T \boldsymbol{\Sigma}_H^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_H)\}^{-1}, \quad (2.33)$$

donde $\boldsymbol{\mu}_H$ y $\boldsymbol{\Sigma}_H$ son el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas de H , respectivamente. Cuando $\boldsymbol{\mu}_H$ y $\boldsymbol{\Sigma}_H$ son desconocidos, la versión muestral de la profundidad de Mahalanobis expresada en (2.33) es:

$$M_h D(H_m; \mathbf{x}) = \{1 + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{X}})\}^{-1}, \quad (2.34)$$

siendo $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} los estimadores muestrales de $\boldsymbol{\mu}_H$ y $\boldsymbol{\Sigma}_H$, respectivamente, de la expresión (2.8). Claramente, en atención de las expresiones (2.33) y (2.34), la profundidad de Mahalanobis del dato \mathbf{x} es una medida acotada en el intervalo $(0, 1]$ que está dada por lo pequeña que es su distancia cuadrática al vector de medias conocido o estimado. La profundidad de Mahalanobis en (2.33) cumple con las cuatro propiedades deseables enunciadas antes. En efecto, suponga que $\mathbf{X} \sim H(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz positiva definida. Considere la transformación $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ en el que \mathbf{A} es no singular, note que por propiedades de los operadores esperanza y covarianza se tiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim H^*(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T). \quad (2.35)$$

Así que de las expresiones (2.33) y (2.35) se puede ver que:

$$\begin{aligned} M_h D(H^*; \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) &= \frac{1}{\left\{1 + [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})]^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)^{-1} [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})]\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b})\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu})\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}}, \\ &= M_h D(H; \mathbf{x}), \end{aligned}$$

lo cual comprueba que $M_h D(H; \mathbf{x})$ es invariante afín. En lo que respecta a la segunda propiedad, es aceptable pensar que si $\boldsymbol{\mu}$ es el centro de H , evidentemente se verifica que $M_h D(H; \boldsymbol{\mu}) = \max_{\mathbf{x}} M_h D(H; \mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$, por consiguiente, $M_h D(H; \mathbf{x})$ es máxima en el centro.

2.3. ENFOQUE BASADO EN PROFUNDIDAD DE DATOS

Continuando con esta misma idea, sea $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\mu} + \xi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ cualquier punto en el *rayo* $\overrightarrow{\boldsymbol{\mu}\mathbf{x}}$ para $\xi \in [0, 1]$. La profundidad de Mahalanobis es monótona respecto del punto de mayor profundidad si $M_h D(H; \mathbf{x}) \leq M_h D(H; \mathbf{x}_0)$, efectivamente, note que:

$$\begin{aligned} M_h D(H; \mathbf{x}_0) &= \frac{1}{\left\{1 + [\boldsymbol{\mu} + \xi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\boldsymbol{\mu} + \xi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + [\xi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\xi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]\right\}}, \\ &= \frac{1}{\left\{1 + \left(\xi^2 \left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]\right)\right\}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ahora observe que cuando $\xi = 1$ en la expresión (2.36):

$$\begin{aligned} M_h D(H; \mathbf{x}_0) &= \frac{1}{\left\{1 + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}}, \\ &= M_h D(H; \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.37)$$

y para cuando $0 \leq \xi < 1$:

$$\frac{1}{\left\{1 + \left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]\right\}} < \frac{1}{\left\{1 + \left(\xi^2 \left[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]\right)\right\}}. \quad (2.38)$$

De este modo, con base en las expresiones (2.37) y (2.38), se exhibe que $M_h D(H; \mathbf{x}) \leq M_h D(H; \mathbf{x}_0)$ para $\xi \in [0, 1]$.

Finalmente, la profundidad de Mahalanobis obedece a la propiedad de desvanecimiento al infinito, ya que si $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ o equivalentemente $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\| \rightarrow \infty$ entonces también $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \rightarrow \infty$, por lo que, de la ecuación (2.33), $M_h D(H; \mathbf{x}) \rightarrow 0$. Esto se debe al hecho particular de que $\|(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\|$ es igual al valor absoluto de $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ (Zertuche-Luis, 2008). Una demostración formal del cumplimiento de las cuatro propiedades por parte de la profundidad de Mahalanobis se puede consultar en Zuo y Serfling (2000).

Es bien conocido que los estimadores muestrales en (2.34) no son robustos, así que la profundidad de Mahalanobis muestral y cualquier procedimiento que incorpore a esta profundidad es igualmente no robusto, además de ser sensible a conjuntos de datos que contienen valores atípicos (Liu y Singh, 1993). Existen algunos enfoques que han tratado de socorrer la falta de robustez, entre los más populares está el *estimador determinante de covarianza mínima* y el *estimador de volumen elipsoidal mínimo*, véase por ejemplo Djauhari (2008) y Muthukrisnan y Poonkuzhali (2017). Un rasgo interesante acerca de la profundidad de Mahalanobis es que hereda la propiedad de invarianza afín en la estadística $r_H(\mathbf{x})$, así que el sistema de coordenadas o la escala de las mediciones subyacentes no altera el resultado de una carta de control r derivada de la profundidad de Mahalanobis. Esta característica es en general cierta para cualquier función de profundidad invariante afín (Liu y Singh, 1993).

2.3.4. Carta de control r basada en la profundidad de Mahalanobis

Sea $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m$ una muestra aleatoria p -variada de tamaño m con distribución H_m que constituyen la muestra de referencia. Asimismo, suponga que $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, es la muestra aleatoria de las p variables a monitorear en línea cuya distribución es G . Conforme a [Zertuche-Luis y Cantú-Sifuentes \(2008\)](#), los pasos a seguir para construir una carta de control r mediante la profundidad de Mahalanobis son:

1. Obtenga los estimadores $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} de la muestra de referencia y calcule posteriormente las profundidades de Mahalanobis de cada \mathbf{Y}_j aplicando la expresión en (2.34).
2. Ordene ascendentemente las profundidades de cada \mathbf{Y}_j y denótelas como $Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[m]}$.
3. Use nuevamente la expresión en (2.34) para hallar las profundidades de Mahalanobis de cada nueva observación de $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, \dots$, empleando los estimadores $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} de la muestra de referencia.
4. Calcule la estadística de clasificación por rangos para cada nueva observación de \mathbf{X}_i como sigue:

$$r_{H_m}(\mathbf{X}_i) = \frac{\#\{\mathbf{Y}_j \mid M_h D(H_m; \mathbf{Y}_j) \leq M_h D(H_m; \mathbf{X}_i), j = 1, \dots, m\}}{m + 1}, \quad (2.39)$$

5. Grafique cada uno de los valores obtenidos en (2.39) *contra* el tiempo y trace conjuntamente una LC = 0.5 y un LCI = α .

Para efectos de clarificar el procedimiento recién descrito y visualizar el comportamiento de una carta de control r se simularon 540 observaciones preliminares de una distribución $\mathcal{N}^2(\mathbf{0}_2, 3 \cdot \mathbf{I}_2)$ y posteriormente 40 observaciones de cada una de las siguientes tres distribuciones:

$$\mathcal{N}^2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{N}^2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}^2\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\right).$$

Con respecto a la muestra preliminar, note que en la primera distribución no hay cambios algunos, en la segunda hay una reducción de dispersión y en la última hay un aumento de ubicación y dispersión. Enseguida, se excluyeron los últimos 40 datos preliminares y se integraron con los 40 que se generaron después para cada distribución. De esta forma, en los tres escenarios, la muestra de referencia quedó conformada por 500 observaciones y la de monitoreo por 80. Dicho esto, se cuantificaron correspondientemente los valores de $M_h D(H_m; \mathbf{y}_j)$, $M_h D(H_m; \mathbf{x}_i)$ y $r_{H_m}(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, \dots, 80$ y $j = 1, \dots, 500$. Una vez encontrados los valores de la estadística de monitoreo y una proporción de falsas alarmas $\alpha = 0.05$ bajo consideración, las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 muestran la conducta gráfica de las tres cartas de control r . Es importante acentuar que el resultado de los diagramas de control es congruente con la información asociada a la construcción de las observaciones de monitoreo. Note que la presencia de falsas alarmas en la Figura 2.6 es razonable con la proporción de falsas alarmas establecida. La Figura 2.7 exhibe la disminución de dispersión establecida en la simulación, esto por la evidente cantidad de rangos que tienden acercarse a uno a partir del tiempo 40. Por su parte, la Figura 2.8 revela un notorio cambio en la media de la distribución y un incremento en la dispersión que se hace visible rápidamente desde el tiempo 40 en adelante. Este último ejemplo ilustra el hecho de que las cartas de control r monitorean simultáneamente cambios de ubicación y aumentos de dispersión en el proceso.

2.3. ENFOQUE BASADO EN PROFUNDIDAD DE DATOS

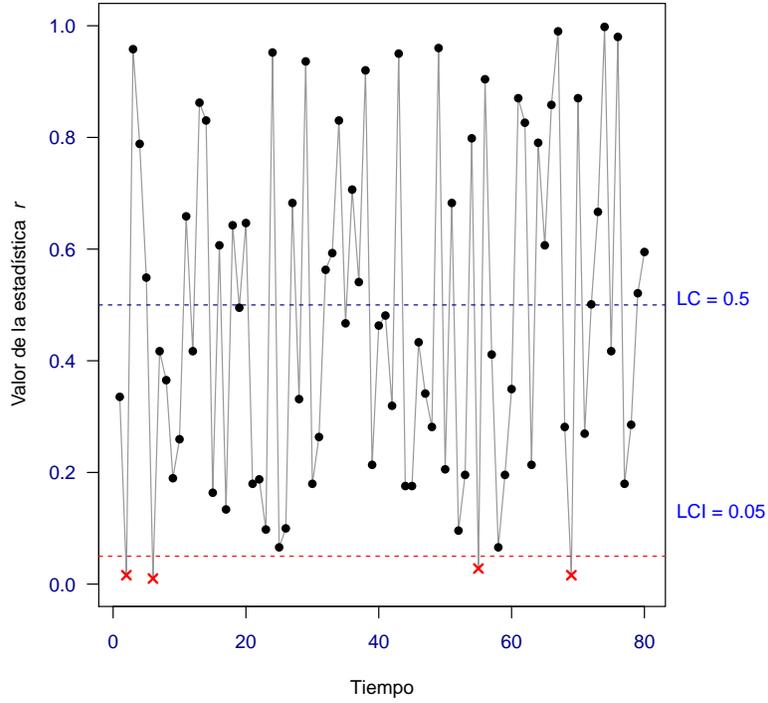


FIGURA 2.6: Carta de control multivariada r basada en la profundidad de Mahalanobis para un proceso en control.

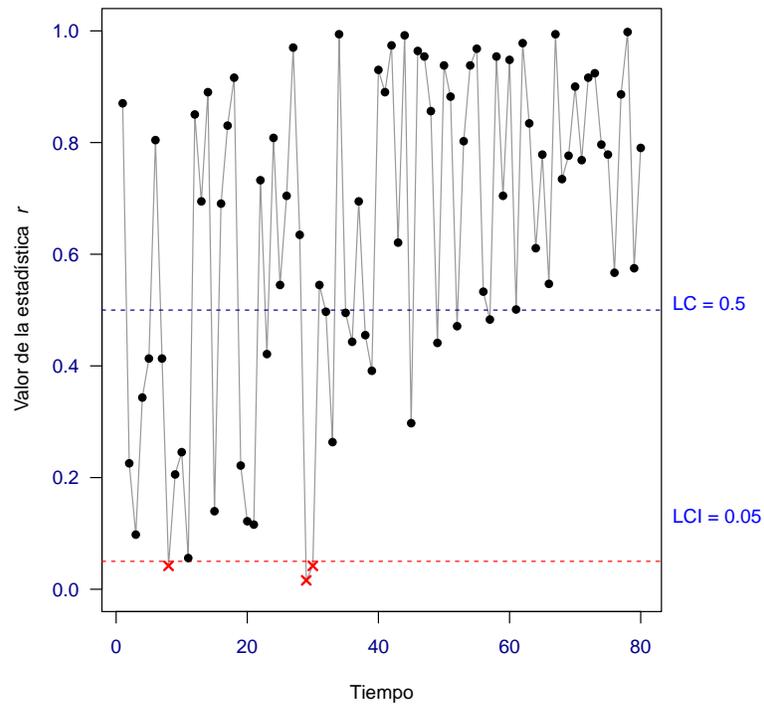


FIGURA 2.7: Carta de control multivariada r basada en la profundidad de Mahalanobis para un proceso con disminución de dispersión.

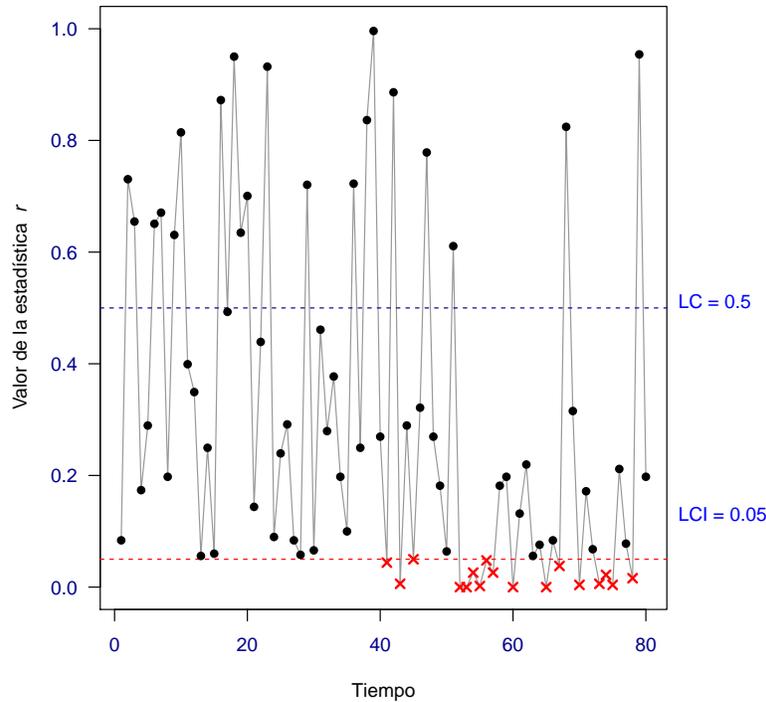


FIGURA 2.8: Carta de control multivariada r basada en la profundidad de Mahalanobis para un proceso con cambio de ubicación y aumento de dispersión.

El campo de métodos orientados a la identificación de la(s) variable(s) causante(s) de alertas de fuera de control en la carta r ha sido poco estudiado. Existen dos propuestas al respecto e implementadas con la profundidad de Mahalanobis. La primera de éstas la introdujeron [Zertuche-Luis et al. \(2008\)](#) quienes diseñaron una *gráfica de proporciones de contribución* por variable, producto de un análisis de componentes principales y bootstrap. Esencialmente, su metodología consiste en obtener, primero, las proporciones de contribución de las observaciones de referencia de cada variable derivadas de la técnica de componentes principales aplicada en los datos de referencia. Luego se generan B muestras bootstrap de estas proporciones y se hallan los cuantiles correspondientes para fungir como límites de control. Este procedimiento se usa como punto de comparación respecto a las proporciones de contribución de los datos de monitoreo, esto es, si estas nuevas proporciones están dentro de los límites antes establecidos, la variable en turno está en control, de lo contrario, está fuera de control. Los detalles técnicos pueden revisarse en la tesis doctoral de [Zertuche-Luis \(2008\)](#). El segundo enfoque es una generalización de la descomposición de la estadística T^2 sugerida por [Piña-Monarez \(2013\)](#) al contexto de la carta de control r . El tratamiento que este autor sugiere mitiga tenuemente algunos inconvenientes de la descomposición MYT de la estadística T^2 y demuestra que, basado en su propuesta, descomponer la estadística T^2 es equivalente a descomponer la profundidad de Mahalanobis, véase [Piña-Monarez \(2018\)](#).

Finalmente, en el área de las investigaciones todavía limitadas sobre la carta de control r , no hay suficiente análisis teórico y práctico acerca de su desempeño en condiciones menos convencionales, por ejemplo, en circunstancias de autocorrelación. De aquí que se desprenda la aportación principal de este trabajo que consiste precisamente en proveer una medida del rendimiento de la carta en cuestión para datos autocorrelacionados.

Capítulo 3

Propuesta metodológica

Esta sección describe la estrategia metodológica a implementar para fines de los objetivos. La comparación se ciñe al marco de datos autocorrelacionados y no normales. En la literatura, sin embargo, el estudio del desempeño de los diagramas de control T^2 , MEWMA y MCUSUM se ha restringido sólo al caso de datos autocorrelacionados y normales, o bien independientes y no normales, mientras que la carta de control r sólo ha sido objeto de análisis para datos independientes con distribución normal y no normal. El régimen más conocido en el diseño y tratamiento computacional de datos autocorrelacionados está basado en el uso del modelo VAR. Este modelo es, dentro de la teoría y el análisis de series de tiempo multivariadas, uno de los más flexibles de manejar con el fin de explicar y pronosticar el comportamiento dinámico de p series de tiempo univariadas de forma simultánea. Debido a que los datos son generados bajo los términos de dicho modelo, en este capítulo se introducen algunos conceptos relativos al modelo VAR para explicitar, posteriormente, el procedimiento de simulación propuesto y las condiciones, así como delimitaciones, de estudio consideradas.

3.1. Algunas nociones teóricas del modelo VAR

El modelo VAR es una extensión natural del modelo autorregresivo univariado, en donde un vector de variables es representado como una función de sus valores pasados, lo que permite construir una variedad de modelos para representar distintas estructuras de autocorrelación en variables multivariadas. Es común denotar al modelo VAR como VAR(k), donde k es el orden del modelo, que simboliza la cantidad de periodos pasados de los que depende la observación actual. La forma básica de un modelo VAR(k), es:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{X}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{X}_{t-k} + \mathbf{u}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{pt})^T$ un vector de orden p de procesos autorregresivos univariados en el tiempo t , $\boldsymbol{\zeta}$ es un vector de constantes de orden p , $\boldsymbol{\Phi}_j$, para $j = 1, 2, \dots, k$, es una matriz de tamaño $p \times p$ integrada por *coeficientes de autocorrelación* $\phi_{ij} \in (-1, 1)$ que miden la dinámica de dependencia entre el valor actual y el rezagado de \mathbf{X}_t , y \mathbf{u}_t es un proceso de ruido blanco vectorial con vector de medias $\mathbf{0}_p$ y matriz de varianzas y covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}_u$ invariantes en el tiempo. Frecuentemente, en las aplicaciones se requiere que $\boldsymbol{\Sigma}_u$ sea definida positiva y que \mathbf{u}_t tenga distribución NMV.

Para ejemplificar la expresión en (3.1) considere un proceso bivariado VAR(2), el cual se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^2 & \phi_{12}^2 \\ \phi_{21}^2 & \phi_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-2} \\ X_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix},$$

o en notación de ecuaciones simultáneas como:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \zeta_1 + \phi_{11}X_{1,t-1} + \phi_{12}X_{2,t-1} + \phi_{11}^2X_{1,t-2} + \phi_{12}^2X_{2,t-2} + u_{1t}, \\ X_{2t} &= \zeta_2 + \phi_{21}X_{1,t-1} + \phi_{22}X_{2,t-1} + \phi_{21}^2X_{1,t-2} + \phi_{22}^2X_{2,t-2} + u_{2t}, \end{aligned}$$

donde $\text{Cov}(u_{1t}, u_{2s}) = \sigma_{12}$ para $t = s$, e igual a 0 de otro modo. Una alternativa más para expresar al modelo VAR(k) es mediante el operador de retardo L , esto es:

$$\Phi(L)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{u}_t, \quad (3.2)$$

en la que $\Phi(L) = \mathbf{I}_p - \Phi L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_k L^k$ es una matriz polinomial de orden $p \times p$. [Box et al. \(2015\)](#) indican que el comportamiento del proceso puede establecerse por la raíces de la ecuación $\det \{\Phi(L)\} = 0$. Un proceso VAR(k) es *estacionario* si todas las raíces de esta ecuación están fuera del círculo unitario, o equivalentemente, si los valores característicos de la matriz:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_p \\ \Phi_k & \Phi_{k-1} & \Phi_{k-2} & \dots & \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

son menores que uno en valor absoluto ([Reinsel, 1993](#)). Los elementos $\mathbf{0}$ de \mathcal{P} en (3.3) son matrices de tamaño $p \times p$ con componentes todas iguales a cero. Por otra parte, los valores más comunes de k y número de series p utilizados en investigaciones, que limitan un tanto la complejidad de la manipulación del modelo VAR, es uno y dos, respectivamente. Bajo estos pormenores las ecuaciones son:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\zeta} + \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{u}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (3.4)$$

o bien:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \zeta_1 + \phi_{11}X_{1,t-1} + \phi_{12}X_{2,t-1} + u_{1t}, \\ X_{2t} &= \zeta_2 + \phi_{21}X_{1,t-1} + \phi_{22}X_{2,t-1} + u_{2t}. \end{aligned}$$

de las cuales ϕ_{12} denota la dependencia lineal que tiene X_{1t} sobre $X_{2,t-1}$ en presencia de $X_{1,t-1}$. Note que en el caso de que $\phi_{12} = 0$, X_{1t} no depende de $X_{2,t-1}$ y el modelo indica que X_{1t} sólo depende de su valor previo con intensidad ϕ_{11} . Lo anterior es similar para cuando $\phi_{21} = 0$. Adicionalmente, si $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$, entonces las series X_{1t} y X_{2t} están *desacopladas*, en cambio, si ϕ_{12} y ϕ_{21} son diferentes de cero se *retroalimentan*. La relación actual entre X_{1t} y X_{2t} es cuantificada través de las entradas que están fuera de la diagonal principal de $\boldsymbol{\Sigma}_u$, así que si $\sigma_{12} = 0$, no existe relación lineal alguna entre X_{1t} y X_{2t} . Suponga que el modelo subyacente VAR(1) bivariado es estacionario, observe que el vector de medias de \mathbf{X}_t es:

3.2. SIMULACIÓN DE DATOS AUTOCORRELACIONADOS

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu} &= \mathbb{E} \{ \mathbf{X}_t \}, \\
&= \mathbb{E} \{ \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{u}_t \}, \\
&= \mathbb{E} \{ \boldsymbol{\zeta} \} + \boldsymbol{\Phi} \mathbb{E} \{ \mathbf{X}_{t-1} \} + \mathbb{E} \{ \mathbf{u}_t \},
\end{aligned}$$

y puesto que $\mathbb{E} \{ \mathbf{X}_t \}$ es constante respecto al tiempo,

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E} \{ \mathbf{X}_t \} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}_p - \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\zeta}, \quad (3.5)$$

siempre que $(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi})^{-1}$ exista. Vea que si $\boldsymbol{\zeta} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\mu}$, la expresión en (3.4) puede escribirse como:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{u}_t. \quad (3.6)$$

La matriz de varianzas y covarianzas de \mathbf{X}_t , denotada por $\boldsymbol{\Gamma}(0)$, está dada por:

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \mathbb{E} \{ (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^T \}, \quad (3.7)$$

que haciendo uso de ciertos resultados puntuales se tiene que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}(0) &= \boldsymbol{\Gamma}(-1)\boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Sigma}_u, \\
&= \{ \boldsymbol{\Gamma}(1) \}^T \boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Sigma}_u, \\
&= \{ \boldsymbol{\Gamma}(0) \boldsymbol{\Phi}^T \}^T \boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Sigma}_u, \\
&= \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Gamma}(0) \boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Sigma}_u.
\end{aligned} \quad (3.8)$$

Las expresiones (3.5), (3.6) y (3.8) son relativamente sencillas de extender al caso de un modelo VAR de orden k estacionario. Los detalles de desarrollo se pueden consultar en [Box et al. \(2015\)](#). Algunas otras propiedades de relevancia general son $\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{u}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_u$, $\text{Cov}(\mathbf{X}_{t-\ell}, \mathbf{u}_t) = 0$, para $\ell > 0$ y adicionalmente, la *matriz de varianzas y covarianzas cruzadas* en el retraso ℓ de \mathbf{X}_t es:

$$\boldsymbol{\Gamma}(\ell) = \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\Gamma}(\ell - 1) + \dots + \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{\Gamma}(\ell - k), \quad \ell > 0. \quad (3.9)$$

3.2. Simulación de datos autocorrelacionados

Por lo que se ha mencionado, las tres componentes que se requieren para generar observaciones multivariadas con autocorrelación conocida son el vector de medias del proceso, la matriz de coeficientes autorregresivos y la matriz de varianzas y covarianzas de los residuos. Un esquema de simulación básico para dos variables con distribución Normal bivariada derivado de un modelo VAR(1) puede ser el integrado por los siguientes elementos:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

de donde $\mathbf{u}_t \sim \mathcal{N}^2(\mathbf{0}_2, \boldsymbol{\Sigma}_u)$. Los datos se generan en el paquete estadístico R ([R Core Team, 2018](#)) basándose en la expresión 3.6. Para simular observaciones bivariadas pseudo-aleatorias con distribución Normal se usó la rutina `mvrnorm` que forma parte de la biblioteca `mvtnorm` ([Genz et al., 2019](#)). El programa puede consultarse en Anexos código 2. Con base en este programa,

se generaron $n = T = 500$ observaciones cuyo comportamiento gráfico se aprecia en la Figura 3.1. Observe que la tendencia de las dos series no sugiere la presencia de patrones no estacionarios y sus medias parecen fluctuar alrededor de las medias establecidas. La estacionariedad, de hecho, es determinada desde que se plantea a la matriz Φ como una matriz diagonal, pues los valores característicos de matrices diagonales son precisamente los valores de la diagonal principal. Existen herramientas gráficas y pruebas de hipótesis de raíces unitarias con las que se puede verificar esta suposición, entre otras, la prueba de Dickey-Fuller aumentada y la prueba de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin, véase Zivot y Wang (2006).

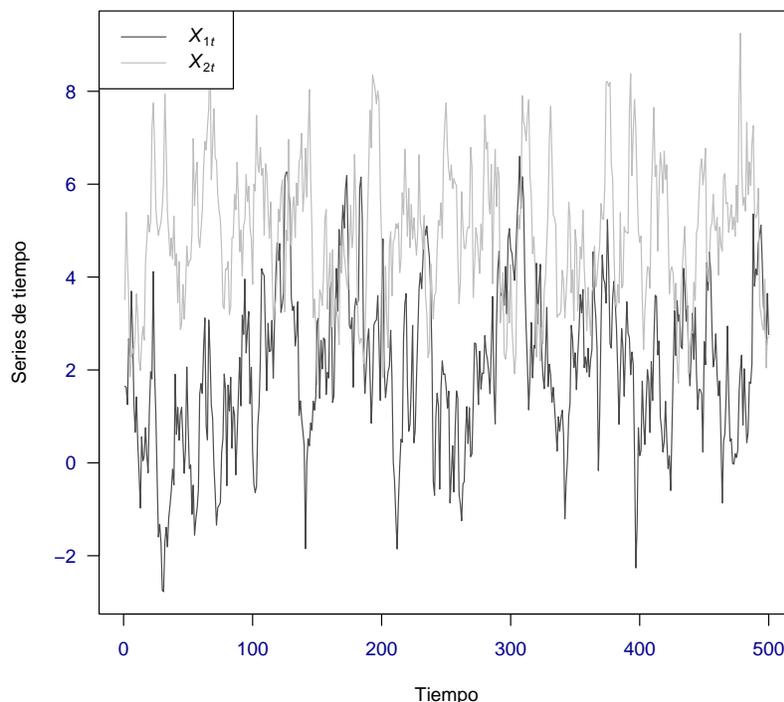


FIGURA 3.1: Simulación de datos autocorrelacionados a partir de un modelo bivariado VAR(1).

Un diagnóstico de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial por variable puede ayudar a detectar, por un lado, la conducta estacionaria de las series y, por otro, que los datos proceden de un proceso autorregresivo de orden uno, además, si se ha inducido en las series de tiempo el grado de autocorrelación especificado en Φ . De esta manera se puede observar que cuando la función de autocorrelación decrece relativamente rápido es evidencia de que la serie es estacionaria, asimismo, como la función de autocorrelación decrece rápidamente y la función de autocorrelación parcial desaparece tras el primer retardo, entonces se tiene evidencia de que la serie proviene de un proceso autorregresivo de orden uno. Más aún, el valor observado de la autocorrelación en el primer retraso de ambas funciones se aproxima con el que se ha fijado en la diagonal de Φ .

La Figura 3.2 muestra la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial de las variables simuladas, se puede notar que en ambas variables la estructura de autocorrelación decae prontamente y la autocorrelación parcial se volatiliza después del primer retraso. También es evidente que los valores de ϕ_{11} y ϕ_{22} son respaldados por el resultado de la simulación. Una prueba de hipótesis inmediata que permite averiguar cuando menos la existencia o no de autoco-

3.2. SIMULACIÓN DE DATOS AUTOCORRELACIONADOS

relación univariadamente es la prueba de Box-Pierce. Igualmente, un modo natural de percibir la autocorrelación por variable es gráficamente los valores de X_{1t} contra $X_{1,t-1}$ y X_{2t} contra $X_{2,t-1}$,

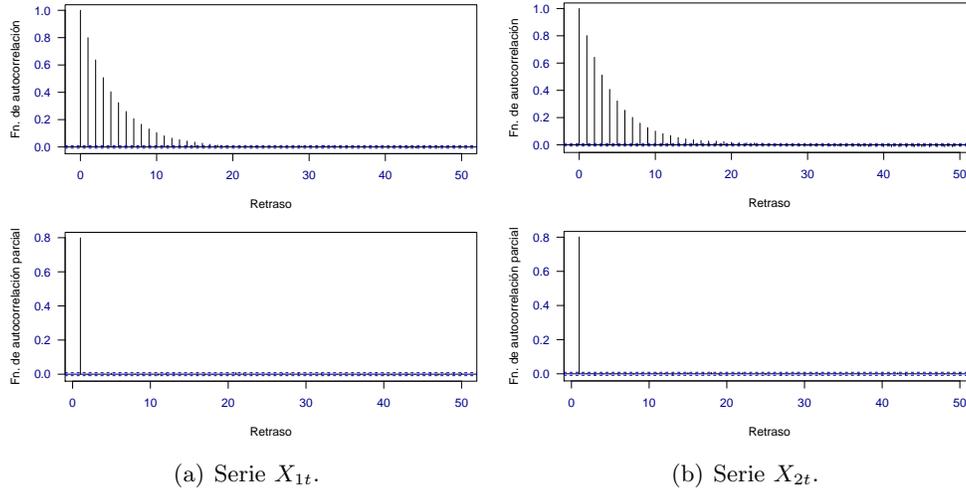


FIGURA 3.2: Autocorrelograma y autocorrelograma parcial de los datos simulados.

véase la Figura 3.3. Para finalizar la autenticación de las características adheridas en la generación de los datos, es posible crear una gráfica multivariada Q-Q con la que se sostenga el supuesto de normalidad bivariada. La Figura 3.4(a) da evidencia de que, a partir de la gráfica señalada, las observaciones si tienen la distribución deseada. Note que los histogramas univariados también aportan información en beneficio de la normalidad y de las medias precisadas en (3.10), véase la Figura 3.4(b). A fin de dilucidar un poco el impacto de la autocorrelación, considere el ejemplo expuesto en (3.10) pero ahora con las variantes:

$$\Phi_{\text{Baja}} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi_{\text{Mixta}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

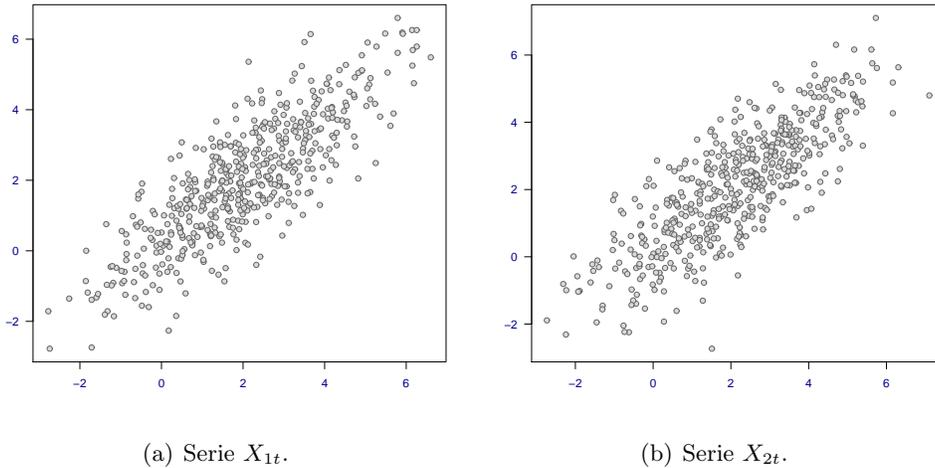


FIGURA 3.3: Representación visual de autocorrelación.

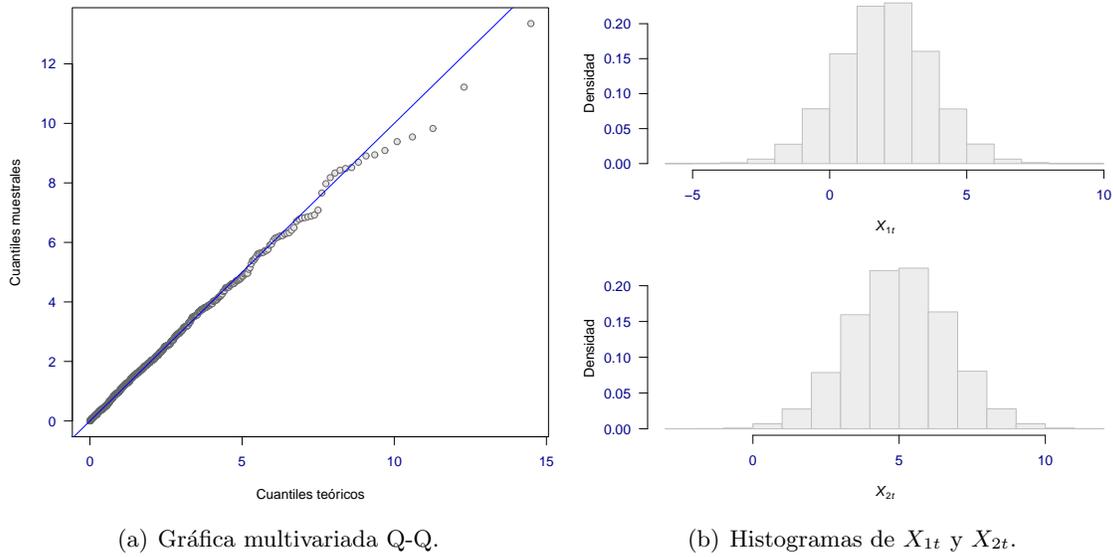


FIGURA 3.4: Resumen distribucional de los datos simulados.

Haciendo uso de las pruebas gráficas exhibidas en las Figuras 3.2, 3.3 y 3.4, los hallazgos de las simulaciones, con base en las matrices Φ de (3.11), conducen de nuevo a las conclusiones obtenidas previamente y se reafirma que a través del modelo VAR estacionario se tiene suficiente control cuando de diseñar datos bivariados autocorrelacionados normales se trata (véase las Figuras 3.5 y 3.6).

3.3. Estudio de simulación Monte Carlo

Descrito el método que se sigue para la generación de los datos, se procede ahora a delinear el procedimiento propuesto, vía simulación Monte Carlo, con objeto de efectuar y validar la comparación de los sistemas de control de interés bajo condiciones de no normalidad y presencia autocorrelación.

3.3.1. Condiciones generales de simulación

Criterio de comparación.

El criterio que se utiliza en este trabajo para evaluar el eficiencia de las gráficas de control y compararlas asimismo, es el ARL, tanto en control como fuera de control, en ambos casos éste es calculado por medio de simulación Monte Carlo. Para volver comparables a las cartas T^2 , MEWMA, MCUSUM y r , se sujetó su desempeño a la obtención de un valor nominal de $ARL_0 \approx 370$ bajo la suposición de normalidad e independencia.

Tamaño de muestra.

El número de datos que se emplea durante la simulación del proceso, que por practicidad es de índole bivariado, es $n_1 = 1500$ y $n_2 = 3000$ para la fase I y II, respectivamente. Lo anterior se debe a que con $n_1 \geq 1000$ el sistema de monitoreo T^2 reporta aproximaciones relativamente más cerca del ARL_0 deseado. Al respecto, Vanhatalo y Kulahci (2015) sugieren que con cantidades in-

3.3. ESTUDIO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO

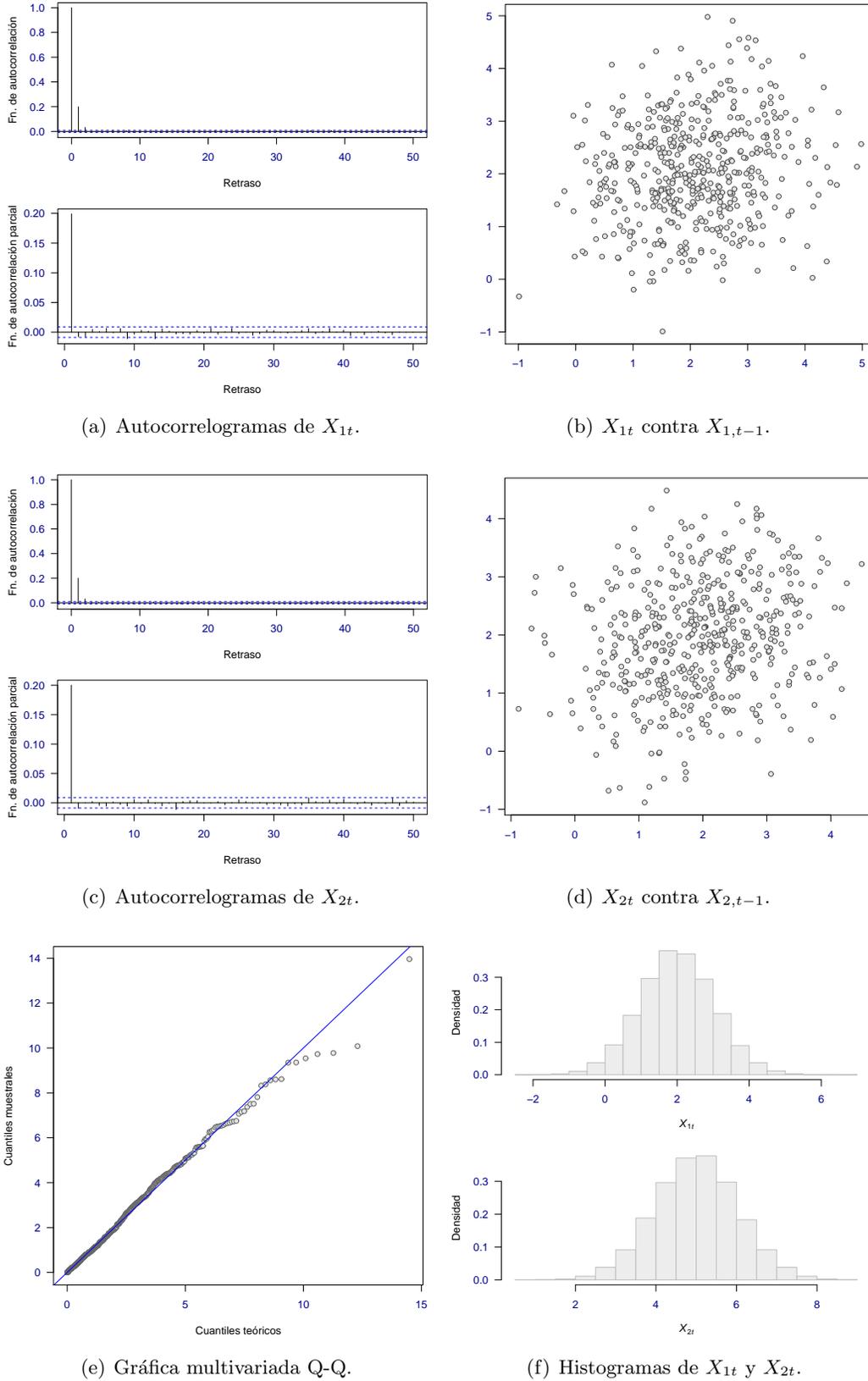


FIGURA 3.5: Diagnóstico de estacionariedad, autocorrelación y distribución probabilística de los datos simulados bajo la configuración de Φ_{Baja} .

3.3. ESTUDIO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO

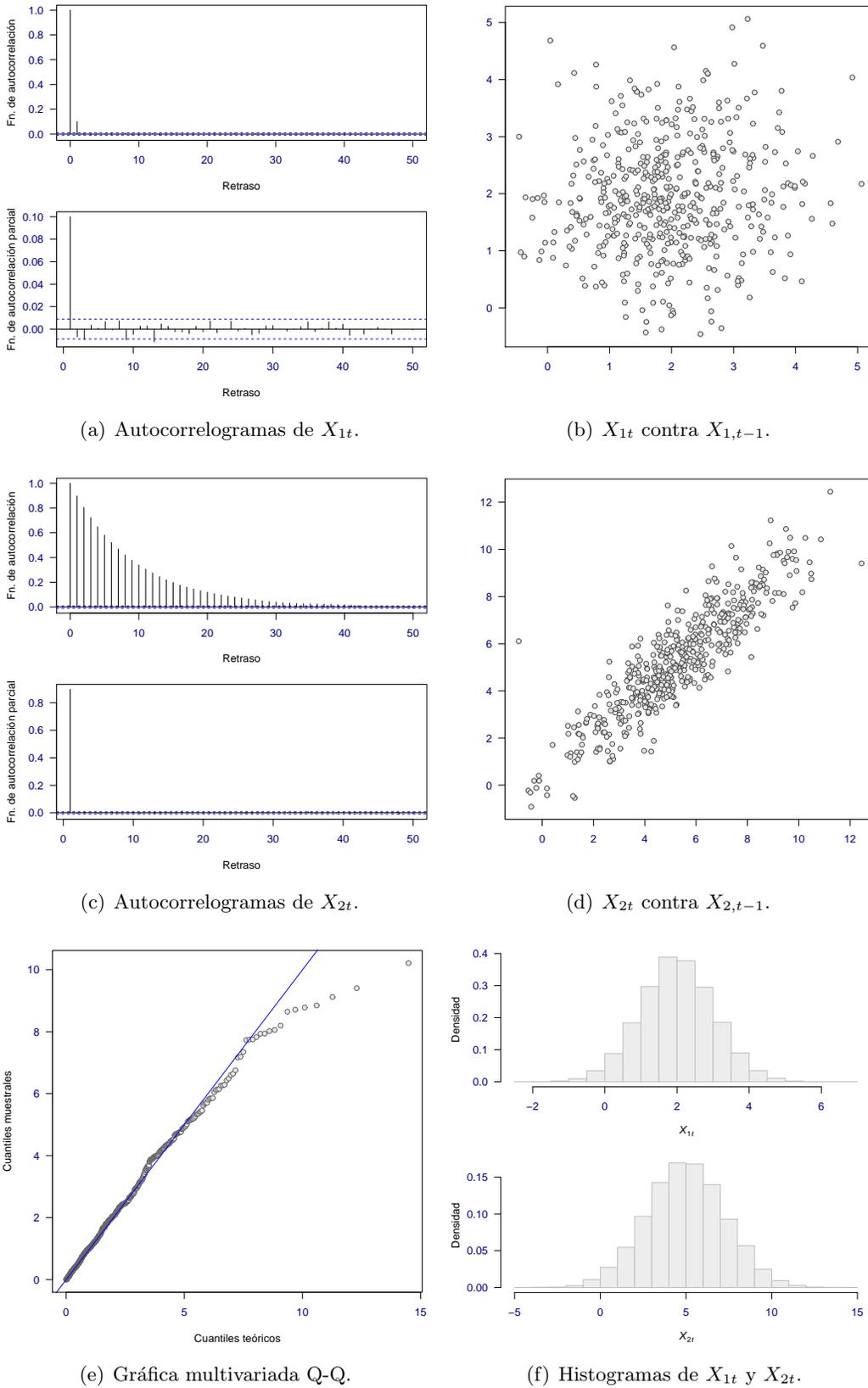


FIGURA 3.6: Diagnóstico de estacionariedad, autocorrelación y distribución probabilística de los datos simulados bajo la configuración de Φ_{Mixta} .

3.3. ESTUDIO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO

cluso de $n_1 = 500$, la carta T^2 ya exhibe valores del ARL_0 que pueden juzgarse cercanos del ARL_0 esperado.

Límites de control.

En función del ARL_0 nominal, note que las cartas T^2 y r se construyen con una proporción de falsas alarmas $\alpha = 0.0027$ y correspondientemente con límites de control:

$$LCS = 11.89 \quad \text{y} \quad LCI = 0.0027. \quad (3.12)$$

En lo concerniente a la carta MEWMA, por simplicidad y sin perder generalidad, se supone que las dos variables del proceso tienen asociado el mismo parámetro de memoria $\lambda = 0.1$, así, el límite de control que atañe al ARL_0 señalado es (Lee y Khoo, 2006b):

$$H_{MEWMA} = 10.08. \quad (3.13)$$

Similarmente, la constante k de la gráfica MCUSUM se fijó en 0.5, típicamente el más preponderante en las aplicaciones, y su límite de control se seleccionó apropiadamente en (Lee y Khoo, 2006a):

$$H_{MCUSUM} = 6.213. \quad (3.14)$$

3.3.2. Delimitaciones

En este apartado se mencionan los factores de estudio que delimitan la cantidad de casos posibles a simular. Estos factores están relacionados con los parámetros que subyacen en el modelo estacionario VAR(1), véase la expresión (3.6).

Proceso en control.

Como en la mayoría de otras investigaciones, el vector de medias del modelo VAR(1) que representa al proceso en control se estableció en:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Proceso fuera de control.

Para simular al proceso fuera de control se ejecutan cuatro diferentes escenarios de cambio en el vector de medias $\boldsymbol{\mu}_0$, cuyas intensidades se miden por el parámetro de no centralidad λ indicado en la expresión (2.22). Los valores de λ que se consideran para analizar la sensibilidad de las gráficas de control son semejantes a los que Kim *et al.* (2012) catalogan como pequeños (0.25, 0.50), medios (2) y grandes (3), en cada caso los cambios se añaden a las variables con la misma magnitud.

Autocorrelación.

Con el propósito de distinguir el efecto que tiene la autocorrelación en los datos, se sugirió que Φ fuera de la forma:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

donde los casos de interés resultan de combinar los valores de ϕ_{11} y ϕ_{22} para niveles de autocorrelación: nula, baja (0.33), regular (0.63), alta (0.93) y negativa (-0.50).

Matriz de varianzas y covarianzas Σ_u .

Se decidió valorar la relación que hay entre las variables en términos de Σ_u mediante las dos especificaciones:

$$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Distribución probabilística de \mathbf{u}_t .

A fin de examinar el comportamiento de los diagramas de control ante la falta del supuesto de normalidad en observaciones calificadamente autocorrelacionadas, se propuso asignar en el ruido blanco a las distribuciones t de Student y Gamma bivariadas (t -BV y GBV) tal y como las definen [Stoumbos y Sullivan \(2002\)](#) y que se recomienda preferentemente que el lector consulte o revise para mayores detalles en, por ejemplo, [Kotz et al. \(2004\)](#) y [Kotz y Nadarajah \(2000\)](#). La elección de estas tres distribuciones se realiza con la intención de construir un entorno distribucional diverso del caso trivial (Normal), esto es, con colas pesadas y sesgado, más no por contar con esas distribuciones en especial. A razón de [Stoumbos y Sullivan \(2002\)](#), la distribución Gamma bivariada puede conceptualizarse como la mitad de las entradas diagonales de una matriz que sigue una distribución de Wishart. Ésta última se concibe generalmente como una extensión multivariada de la distribución univariada Ji-cuadrada. Tenga en cuenta que si Σ_u es la matriz de varianzas y covarianzas asociada a la distribución normal del ruido blanco, entonces la matriz de varianzas y covarianzas en el caso de la t -BV se obtiene como:

$$\Sigma_{t(v)} = \frac{v-2}{v} \cdot \Sigma_u, \quad (3.18)$$

en donde v es un escalar que representa los grados de libertad de la distribución t -BV. En lo que toca a la distribución GBV, los elementos ij -ésimos ψ_{ij} de la matriz de varianzas y covarianzas, denotada por $\Sigma_{\mathcal{W}(\nu)}$, están dados por:

$$\psi_{ij} = \sqrt{\frac{2\sigma_{ij}}{\nu}}, \quad (3.19)$$

siendo σ_{ij} el ij -ésimo elemento de la matriz Σ_u y ν el parámetro de forma de la distribución GBV. [Boone \(2010\)](#) mostró con la ayuda de simulación que cuando los valores de v y ν tienden a ser más grandes, la conducta distribucional de los datos, con o sin estructura de autocorrelación, se aproxima al proceder de la distribución Normal bivariada. Habiendo referido esto, el presente estudio se vale de las distribuciones t -BV y GBV usando $v = 3, 6, 20$ y $\nu = 1, 16$.

Considere por ejemplo que se generan 500 observaciones bivariadas normales autocorrelacionadas de la mano de las componentes:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Suponga que $v = 3$ y $\nu = 4$, entonces las matrices de varianzas y covarianzas de las distribuciones t -BV y GBV vienen a ser:

3.3. ESTUDIO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO

$$\Sigma_{t(3)} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix} \quad y \quad \Sigma_{\mathcal{W}(4)} = \begin{bmatrix} 0.71 & 0 \\ 0 & 0.71 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Basándose en los elementos expuestos en (3.20) y en las matrices de (3.21), se constituye ya un esquema de simulación viable para producir 500 datos bivariados de la distribución t y Gamma equiparables con el caso Normal. La simulación de estos dichos datos se lleva a cabo nuevamente en el ambiente de trabajo R (R Core Team, 2018) de manera análoga a como se generaron en el caso Normal. Para producir los datos pseudo-aleatorios bivariados con distribución t de Student y Gamma se han aprovechado los recursos que R dispone a través de las rutinas `rmvt` y `rwishart`, respectivamente. La primera se encuentra en la biblioteca `mvtnorm` (Genz *et al.*, 2019) y la siguiente en `bayesm` (Rossi, 2019). En Anexos código 2 se localizan los programss para su consulta. Los resultados de la simulación que se muestran en las Figuras 3.7 y 3.8, apuntan a que no hay evidencia alguna para dudar, al menos visualmente, de que los datos plasman los atributos que se esperan para evaluar eficazmente el rendimiento de las cartas de control.

3.3.3. El algoritmo

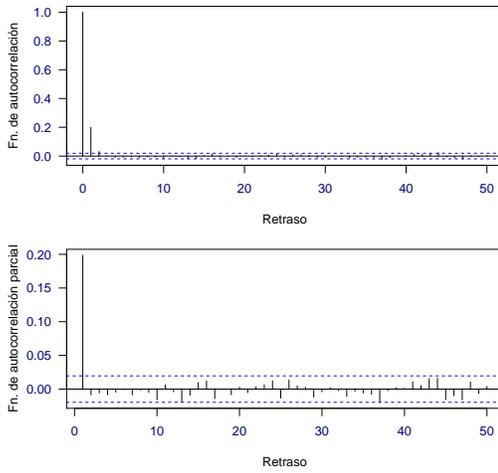
Una vez determinada la distribución relacionada con el ruido blanco, la combinación de coeficientes autorregresivos en Φ y la magnitud de cambio δ asociada al parámetro de no centralidad, las actividades que desarrolla el algoritmo propuesto son:

- (1) Fase I de referencia del proceso: Genere $n_1 = 1500$ datos bivariados autocorrelacionados con media $\mu_0 = \mathbf{0}$ y estime el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas de los datos a partir de la expresión en (2.8).
- (2) Fase II de monitoreo del proceso: Genere $n_2 = 3000$ datos bivariados autocorrelacionados con media $\mu_1 = \mu_0 + \delta$. Cuando $\delta = \mathbf{0}$ el proceso se mantiene en control.
- (3) Implemente los cuatro sistemas de monitoreo con las estimaciones calculadas en el paso (1) y los límites de control señalados en las expresiones (3.12), (3.13) y (3.14).
- (4) Para cada gráfica de control, cuantifique el número de puntos que están en control hasta antes de encontrar un punto fuera, es decir, obtenga sus longitudes de corrida. Si no se exhiben señales de fuera de control, la longitud de corrida en ese caso se restringe al valor de $n_2 = 3000$.
- (5) Repita $B = 1000$ veces los pasos (1) – (4) y almacene las 1000 longitudes de corrida por diagrama de control.
- (6) Sean $RL^{(1)}, RL^{(2)}, \dots, RL^{(1000)}$ las longitudes de corrida derivadas en el paso (5), entonces estime, indistintamente de la carta de control, el ARL de la forma:

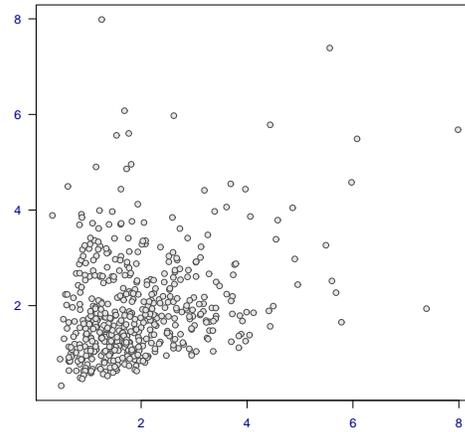
$$ARL \approx \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B RL^{(i)}. \quad (3.22)$$

Finalmente, un aspecto importante que debe aclararse es el enfoque en el que esta disertación basa la operabilidad de los métodos de control, el cual reincide en el marco de parámetros estimados que ignoran el impacto de la presencia de autocorrelación. Esto produce diferencias sustanciales con la mayoría de otras investigaciones que implementan cartas de control confiadas en el conocimiento de los parámetros, es decir, en el vector de medias μ y la matriz de varianzas y covarianzas verdadera $\Gamma(0)$, o bien con enfoques que merman el problema de la autocorrelación. Sin embargo, debido a que con frecuencia estos enfoques son poco pragmáticos y los parámetros

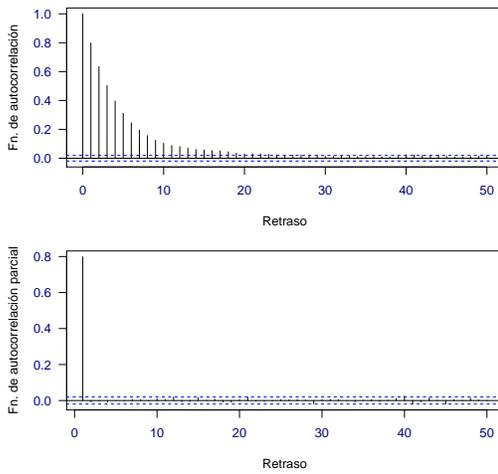
3.3. ESTUDIO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO



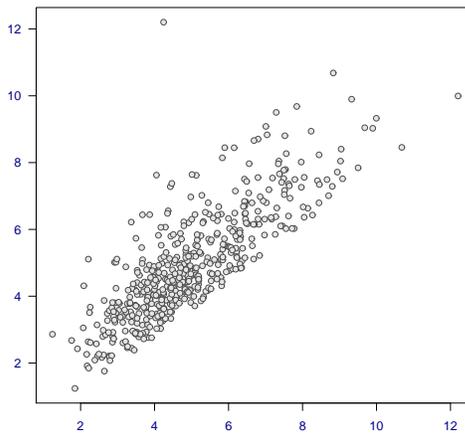
(a) Autocorrelogramas de X_{1t} .



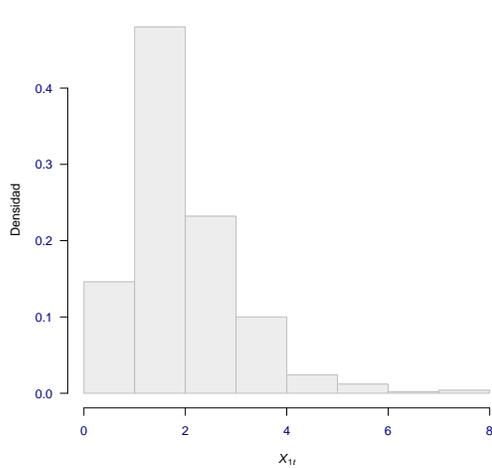
(b) X_{1t} contra $X_{1,t-1}$.



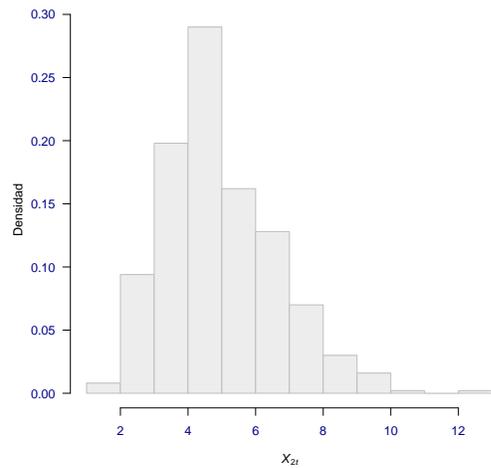
(c) Autocorrelogramas de X_{2t} .



(d) X_{2t} contra $X_{2,t-1}$.



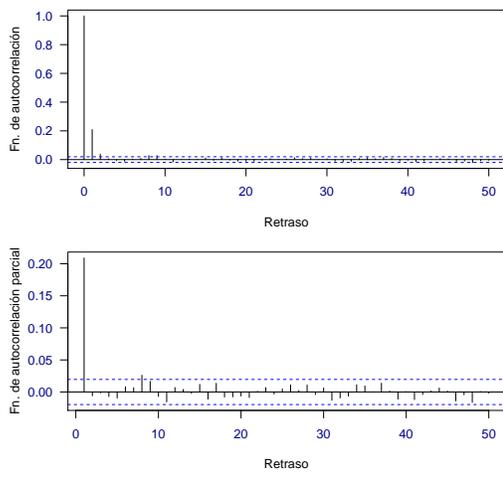
(e) Histograma de X_{1t}



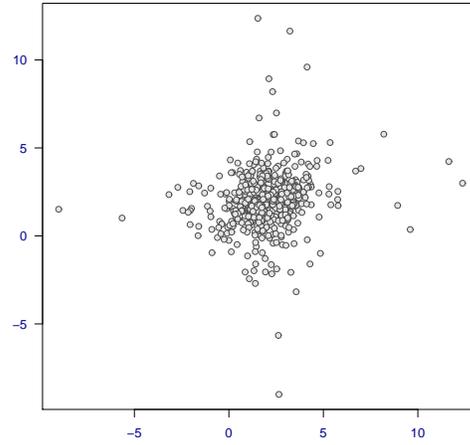
(f) Histograma de X_{2t}

FIGURA 3.7: Resumen gráfico de datos autocorrelacionados simulados con distribución Gamma bivariada.

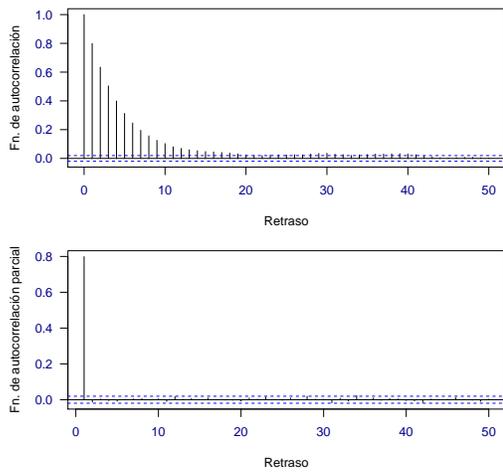
3.3. ESTUDIO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO



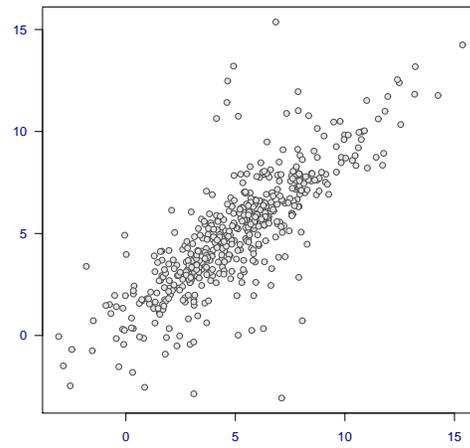
(a) Autocorrelogramas de X_{1t} .



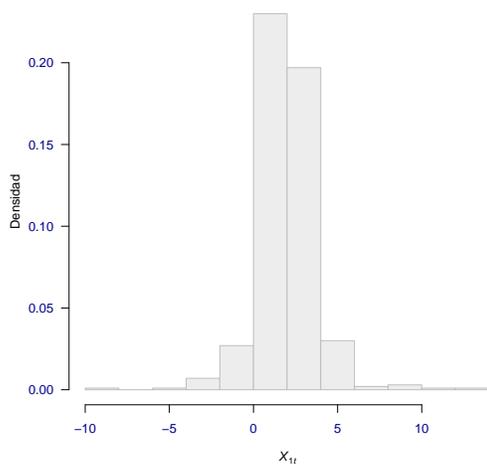
(b) X_{1t} contra $X_{1,t-1}$.



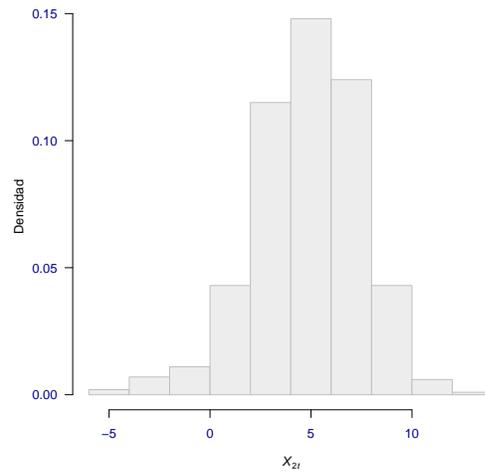
(c) Autocorrelogramas de X_{2t} .



(d) X_{2t} contra $X_{2,t-1}$.



(e) Histograma de X_{1t} .



(f) Histograma de X_{2t} .

FIGURA 3.8: Resumen gráfico de datos autocorrelacionados simulados con distribución t de Student biviada.

se desconocen, se insiste en contemplar a los estimadores mostrados en la expresión (2.8). No obstante, es de subrayar que la manipulación del parámetro de no centralidad con el que se cuantifica la magnitud de cambio si necesitó de $\mathbf{\Gamma}(0)$. La expresión de esta matriz aludida en (3.8) puede no ser a simple vista tan sencilla de manejar, pero puede deducirse más fácilmente aplicando el siguiente resultado. Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} matrices cuyas dimensiones hacen conformable su multiplicación. Entonces:

$$\text{vec}\{\mathbf{ABC}\} = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \cdot \text{vec}\{\mathbf{B}\}, \quad (3.23)$$

denotando \otimes el producto de Kronecker y vec la vectorización. Así, para $p = 2$, note que:

$$\begin{aligned} \text{vec}\{\mathbf{\Gamma}(0)\} &= \text{vec}\{\mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}(0)\mathbf{\Phi}^T\} + \text{vec}\{\mathbf{\Sigma}_u\}, \\ &= (\mathbf{\Phi} \otimes \mathbf{\Phi}^T) \cdot \text{vec}\{\mathbf{\Gamma}(0)\} + \text{vec}\{\mathbf{\Sigma}_u\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

de donde se obtiene que:

$$\text{vec}\{\mathbf{\Gamma}(0)\} = (\mathbf{I}_4 - \mathbf{\Phi} \otimes \mathbf{\Phi})^{-1} \cdot \text{vec}\{\mathbf{\Sigma}_u\}. \quad (3.25)$$

Cuando $\mathbf{\Phi}$ es una matriz diagonal y $\phi_{11} = \phi_{22} = \phi$, se puede ver que:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(0) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{\Gamma}(0)\mathbf{\Phi}^T + \mathbf{\Sigma}_u, \\ &= \phi \mathbf{I}_2 \mathbf{\Gamma}(0) \phi \mathbf{I}_2 + \mathbf{\Sigma}_u, \\ &= \phi^2 \mathbf{\Gamma}(0) + \mathbf{\Sigma}_u, \\ &= (1 - \phi^2)^{-1} \mathbf{\Sigma}_u. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Capítulo 4

Resultados y discusión

Lo ideal al construir cartas de control para el monitoreo de un proceso, es disminuir el número de falsas alarmas cuando el proceso está en control y detectar lo más rápidamente posible cuando el proceso ha salido de control, por lo que los límites de control deberán ser fijados de tal manera que para un valor razonable de falsas alarmas fijo, la mejor carta de control sea aquella que detecte más rápido la pérdida del estado en control del proceso. De aquí que la presentación de los resultados se seccione en dos principales partes, la primera incumbe en el rendimiento de los diagramas de control cuando el proceso está en control y la segunda cuando está fuera de control. Adicionalmente, se presentan separados por la distribución de los datos. En cada contexto los resultados se han estructurado en tablas configuradas según el grado autocorrelación, un panel con los parámetros de la distribución del ruido blanco y la magnitud de cambio inducida en el vector de medias del proceso.

4.1. Resultados de la simulación

4.1.1. Caso Normal

La Tabla 4.1 muestra el comportamiento en control de los cuatro sistemas de monitoreo. En la Tabla 4.1 note que el ARL_0 de las cartas de control para mediciones que no están autocorrelacionadas se ubica muy cercano del valor nominal de 370. Observe que el efecto de la autocorrelación en la gráfica T^2 no sugiere un incremento de la proporción de falsas alarmas como [Moraesa et al. \(2015\)](#) exponen, aquí el ARL_0 es sustancialmente más grande a medida que el grado de la autocorrelación es más alto. El aumento del ARL_0 no es perjudicial, al contrario, es benéfico y desable siempre y cuando no lesione su capacidad de detección de cambio. Este resultado es congruente con lo reportado por [Vanhatalo y Kulahci \(2015\)](#) y se corrobora en la Tabla 4.2. Los sistemas de monitoreo MEWMA y MCUSUM, por su parte, exhiben un decrecimiento inadmisiblemente del ARL_0 para datos con autocorrelación positiva que produce una tasa desmesurada de falsas alarmas. Esta condición es inaceptable en un método de control y hace que no sea recomendable el uso de este tipo de gráficas en presencia de autocorrelación positiva. En contraste, vea que si las observaciones de las dos variables están autocorrelacionadas en forma negativa o bien cuando sólo una de ellas lo está y la otra no presenta autocorrelación, el ARL_0 de las gráficas MEWMA y MCUSUM crece excesivamente. La carta no paramétrica r basada en la profundidad de Mahalanobis expone, al igual que el sistema de monitoreo T^2 , un aumento significativo en el ARL_0 que se manifiesta conforme el nivel de autocorrelación es elevado. También puede apreciarse de la Tabla 4.1 que no existen mayores incidencias en el ARL_0 causadas por el nivel de correlación instaura-

TABLA 4.1: Valores de ARL_0 con observaciones normales bivariadas y diferentes grados de autocorrelación.

Φ		$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$			
ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM
	0.00	371.76	373.86	369.98	369.46	371.45	371.91	372.59	368.29
	0.33	392.64	389.38	107.32	103.00	421.27	410.50	104.59	108.29
0.00	0.63	410.17	401.72	56.46	54.79	499.16	432.77	58.40	55.30
	0.93	456.18	437.80	33.14	32.16	565.21	500.69	37.72	36.22
	-0.50	377.55	373.35	1252.64	1247.99	432.30	426.21	625.94	624.56
	0.00	390.98	385.86	104.97	99.64	418.41	406.32	107.26	105.11
	0.33	397.06	387.62	57.88	57.93	437.42	427.65	61.28	60.63
0.33	0.63	415.64	406.32	32.69	31.83	503.93	483.40	39.70	36.77
	0.93	495.97	483.81	26.16	26.54	574.77	522.12	35.15	32.61
	-0.50	387.61	382.20	159.65	157.58	441.65	437.77	132.29	134.41
	0.00	406.47	402.04	53.09	52.82	496.27	438.85	56.93	55.47
	0.33	413.79	404.04	34.14	33.75	507.18	488.97	37.00	35.19
0.63	0.63	439.08	425.16	23.04	23.47	569.88	547.31	26.45	25.42
	0.93	542.80	531.39	21.17	21.48	650.02	635.15	27.68	26.85
	-0.50	410.72	392.72	54.56	52.42	469.98	445.36	57.99	57.70
	0.00	457.34	440.20	32.85	32.18	568.38	509.30	37.44	35.59
	0.33	497.84	486.47	27.13	27.65	578.78	527.13	34.23	32.78
0.93	0.63	539.54	532.01	21.61	22.15	655.45	645.10	30.13	29.09
	0.93	656.01	646.66	20.08	20.70	703.57	698.40	23.82	22.55
	-0.50	494.12	477.61	38.00	37.63	561.07	543.20	42.75	39.51
	0.00	380.24	375.39	1259.92	1256.44	435.82	429.03	625.75	622.28
	0.33	385.02	383.76	158.47	155.38	443.31	436.55	131.58	138.16
-0.50	0.63	415.60	393.71	54.03	55.31	473.54	447.49	57.98	57.17
	0.93	495.58	475.69	36.35	35.99	563.92	554.76	41.06	40.60
	-0.50	430.00	399.20	2970.00	3000.00	422.25	402.45	2988.64	3000.00

do en la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas del ruido blanco, esto se debe a que, aún cuando el valor del ARL_0 de los diagramas de control es un poco más grande al considerar $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0.9$ que $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0$, la tendencia de sus desempeños no sufre alteración alguna, es por ello que el análisis del ARL_1 que se amplía en la Tabla 4.2 sólo toma en consideración que $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0.9$. Vea en la Tabla 4.2 que la sensibilidad a cambios de pequeñas y medias magnitudes, bajo independencia, es evidentemente mayor en los diagramas MEWMA y MCUSUM que en la gráfica T^2 , lo cual ha sido señalado ya, por ejemplo, en Montgomery (2009). Otro aspecto que puede visualizarse en la Tabla 4.2 suponiendo independencia, y que está en línea con lo marcado por Zertuche-Luis y Cantú-Sifuentes (2008), es que la potencialidad de detectar una señal de fuera de control en los esquemas T^2 y r es muy similar excepto en cambios pequeños. Sin embargo, como era de esperarse, la rapidez con la que las cartas de control reconocen un despla-

zamiento en el vector de medias a su debido tiempo se deteriora. Este daño es particularmente a causa de altas proporciones de autocorrelación positiva en las cartas T^2 y r , mientras que en las gráficas MEWMA y MCUSUM es provocado por niveles regulares de autocorrelación negativa. Conviene resaltar que el rendimiento de los diagramas T^2 y r para datos que manifiestan autocorrelación baja y regular no parece alejarse numerosamente del rendimiento ideal para cuando se alimentan de mediciones pseudo-aleatorias en cambios de tamaño medio y grande. También es importante subrayar que si bien los sistemas MEWMA y MCUSUM detectan antes que las cartas T^2 y r los cambios en la media en la mayoría de los casos, debe tenerse en cuenta que generan inmoderadas cantidades de falsas alarmas, así que la sensibilidad que revelan para la detección de cambios con observaciones autocorrelacionadas está en detrimento de la tasa de falsas alarmas. Los hallazgos de las Tablas 4.1 y 4.2 sugieren, en suma, que ninguno de los cuatro diagramas de control examinados es del todo confiable cuando se supervisa un proceso bivariado con datos normales autocorrelacionados.

4.1.2. Caso no Normal

Los resultados relativos al ARL_0 de las cartas de control implementadas con observaciones que se distribuyen t -BV y GBV se proporcionan a partir de la Tabla 4.3 y 4.7, respectivamente. En virtud de las cifras que se presentan en ambas tablas, es indudable que, sin considerar la autocorrelación, las distribuciones con colas muy pesadas, altos niveles de curtosis y sesgo representan un verdadero desafío para el esquema paramétrico T^2 , ya que su ARL_0 baja inaceptablemente con respecto al valor nominal, en especial para mediciones distribuidas Gamma con parámetro de forma $\nu = 1$. Esta pérdida, en cambio, resulta ser más moderada en la gráfica MEWMA que en las cartas MCUSUM y T^2 para datos con distribución t -BV. Stoumbos y Sullivan (2002) mostraron que la efectividad del diagrama MEWMA puede llegar a ser suficientemente robusto, dependiendo del valor del parámetro de memoria λ seleccionado, a datos que se alejan mucho la normalidad bivariada, como la distribución $GBV(\nu = 1)$, por lo que el resultado encontrado en este estudio de simulación se puede constatar con el artículo de los autores recién referidos. Por otro lado, la gráfica MCUSUM sufre una reducción significativa en el ARL_0 si la violación de la suposición de normalidad ocurre cuando se toman mediciones de una distribución t -BV con $\nu = 3$ grados de libertad. Sin embargo, cuando la distribución subyacente es $GBV(\nu = 1)$, su desempeño da indicios de cierta robustez, semejante al de la carta MEWMA. Una apreciación que cabe mencionar es la relacionada con la inclinación que guarda el ARL_0 en ámbitos no normales con el contexto normal, observe que ARL_0 obtenido para observaciones que siguen las distribuciones t -BV($\nu = 20$) y $GBV(\nu = 16)$, véase las Tablas 4.5 y 4.8 respectivamente, comienza a distar menos del ARL_0 asumiendo la suposición de normalidad en los sistemas de monitoreo T^2 , MEWMA y MCUSUM, en otras palabras, a medida que la distribución se aproxima a la normalidad bivariada, la estimación del ARL_0 se acerca al valor de ARL_0 deseado (Boone, 2010). Una vez añadido el efecto de la autocorrelación se puede ver básicamente que las cartas de control reproducen la postura tomada en el caso de observaciones normales, esto es, el ARL_0 de la gráfica T^2 aumenta y el de las cartas MEWMA y MCUSUM desciende gradualmente al elevar positivamente el rango de la autocorrelación. Observe que esta misma conducta prevalece en el rendimiento de los cuatro diagramas de control invariablemente del parámetro de forma y de los grados de libertad contemplados en la distribuciones GBV y t -BV, véase las Tablas 4.4, 4.5, 4.7 y 4.8.

Finalmente, era de preverse que la gráfica de control más competitiva en medios conformados por datos independientes no normales fuese la no paramétrica. Vea que su ARL_0 en las tres

4.1. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

distribuciones t es ligeramente inferior pero muy cercano de 370, además de ser muy próximo entre distribuciones, véase las Tablas 4.3, 4.4 y 4.5. Con mediciones pseudo-aleatorias GBV($\nu = 1$) y GBV($\nu = 16$), se distingue que el ARL_0 decae respecto al ARL_0 nominal pero no radicalmente (Tablas 4.7 y 4.8). El desempeño dentro de control de la carta basada en la profundidad de Mahalanobis, en condiciones de autocorrelación y no normalidad, no parece impactar negativamente ya que su ARL_0 incrementa tanto como acrecenta la autocorrelación. Por otro lado, es interesante notar que, con datos independientes, la rapidez para identificar puntos de fuera de control es superior que en el resto de las cartas para casi cualquier dimensión de cambio y superior al que se halla incluso utilizando observaciones normales, véase las Tablas 4.6 y 4.9. Ahora bien, es fácil percatarse que el efecto de la autocorrelación en el rendimiento fuera de control de la carta r se concreta en la erosión constante del poder de detección de cambios, sobre todo, al tratarse de de-

TABLA 4.3: Valores de ARL_0 con observaciones t -Student bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 3$).

Φ		$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$			
ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM
	0.00	79.81	366.23	281.93	247.81	85.63	368.15	283.05	250.6
	0.33	84.29	381.43	81.78	69.09	97.38	406.34	79.46	73.69
0.00	0.63	88.05	393.52	43.02	36.75	115.38	428.39	44.37	37.63
	0.93	97.93	428.86	25.25	21.57	130.65	495.62	28.66	24.65
	-0.50	81.05	365.73	954.53	837.07	99.93	421.90	475.52	424.98
	0.00	83.94	377.99	79.99	66.83	96.72	402.21	81.48	71.52
	0.33	85.24	379.71	44.10	38.86	101.11	423.32	46.55	41.26
0.33	0.63	89.23	398.03	24.91	21.35	116.48	478.50	30.16	25.02
	0.93	106.48	473.93	19.94	17.80	132.86	516.84	26.70	22.19
	-0.50	83.21	374.40	121.66	105.70	102.09	433.34	100.50	91.46
	0.00	87.26	393.84	40.45	35.43	114.71	434.41	43.25	37.75
	0.33	88.83	395.79	26.02	22.64	117.23	484.02	28.11	23.94
0.63	0.63	94.26	416.48	17.56	15.74	131.73	541.77	20.09	17.30
	0.93	116.53	520.55	16.13	14.40	150.25	628.72	21.03	18.27
	-0.50	88.17	384.71	41.57	35.16	108.64	440.86	44.06	39.26
	0.00	98.18	431.21	25.03	21.58	131.38	504.14	28.45	24.22
	0.33	106.88	476.54	20.67	18.54	133.78	521.80	26.00	22.30
0.93	0.63	115.83	521.15	16.46	14.86	151.51	638.57	22.89	19.79
	0.93	140.83	633.46	15.30	13.89	162.63	691.33	18.10	15.35
	-0.50	106.08	467.86	28.95	25.24	129.69	537.70	32.48	26.89
	0.00	81.63	367.73	960.08	842.74	100.74	424.69	475.37	423.43
	0.33	82.66	375.93	120.76	104.22	102.47	432.14	99.96	94.01
-0.50	0.63	89.22	385.68	41.17	37.10	109.46	442.96	44.05	38.90
	0.93	106.39	465.98	27.70	24.14	130.35	549.14	31.19	27.63
	-0.50	92.31	391.06	2263.20	2012.21	97.60	398.38	2270.43	2041.35

TABLA 4.4: Valores de ARL_0 con observaciones t -Student bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($v = 6$).

Φ		$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$			
ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM
	0.00	102.81	368.43	308.93	277.81	105.13	367.79	312.65	284.9
	0.33	108.58	383.73	89.61	77.45	119.55	405.95	87.76	83.77
0.00	0.63	113.43	395.88	47.14	41.20	141.66	427.97	49.01	42.78
	0.93	126.16	431.44	27.67	24.18	160.40	495.13	31.65	28.02
	-0.50	104.41	367.92	1045.95	938.41	122.68	421.48	525.25	483.15
	0.00	108.13	380.26	87.65	74.92	118.74	401.81	90.00	81.31
	0.33	109.81	381.99	48.33	43.56	124.13	422.91	51.42	46.90
0.33	0.63	114.95	400.42	27.30	23.93	143.01	478.04	33.32	28.44
	0.93	137.16	476.78	21.85	19.95	163.11	516.33	29.49	25.23
	-0.50	107.19	376.65	133.31	118.49	125.33	432.92	111.00	103.98
	0.00	112.41	396.20	44.33	39.72	140.84	433.98	47.77	42.91
	0.33	114.43	398.17	28.51	25.38	143.93	483.55	31.05	27.22
0.63	0.63	121.43	418.98	19.24	17.65	161.73	541.24	22.19	19.66
	0.93	150.11	523.67	17.67	16.15	184.47	628.11	23.23	20.77
	-0.50	113.58	387.02	45.55	39.42	133.38	440.42	48.66	44.64
	0.00	126.48	433.80	27.43	24.19	161.30	503.65	31.42	27.53
	0.33	137.68	479.40	22.65	20.79	164.25	521.29	28.72	25.36
0.93	0.63	149.21	524.29	18.04	16.65	186.01	637.95	25.28	22.50
	0.93	181.42	637.27	16.76	15.57	199.67	690.66	19.99	17.45
	-0.50	136.65	470.67	31.73	28.30	159.23	537.17	35.87	30.57
	0.00	105.15	369.93	1052.03	944.76	123.68	424.27	525.09	481.39
	0.33	106.48	378.19	132.32	116.84	125.81	431.71	110.41	106.87
-0.50	0.63	114.93	387.99	45.11	41.59	134.39	442.53	48.65	44.23
	0.93	137.05	468.77	30.35	27.06	160.04	548.61	34.45	31.41
	-0.50	118.92	393.40	2479.94	2255.81	119.83	397.99	2507.87	2320.75

sajustes pequeños y con altos grados de autocorrelación. En contraposición, ocurre que para desplazamientos de tamaño medio y grande, la autocorrelación baja y regular poco incide en el ARL_1 del método no paramétrico así se ejecute con datos distribuidos t -BV o GBV. Hay algunas combinaciones de niveles de autocorrelación en cambios pequeños que no aparentan influir desfavorablemente en su capacidad para identificar señales de detección cambio, pero en la gran cantidad de los casos así es, por ende, la diferencia en el rendimiento del diagrama r con mediciones autocorrelacionadas es obvia en los cambios de magnitudes más pequeños.

4.1. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

TABLA 4.5: Valores de ARL_0 con observaciones t -Student bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 20$).

Φ		$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$			
ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM
	0.00	212.43	369.01	355.94	341.27	215.32	369.96	356.31	345.67
	0.33	224.36	384.33	103.24	95.14	244.86	408.34	100.02	101.64
0.00	0.63	234.38	396.51	54.32	50.61	290.13	430.50	55.85	51.90
	0.93	260.67	432.12	31.88	29.71	328.52	498.05	36.07	34.00
	-0.50	215.74	368.50	1205.11	1152.77	251.27	423.97	598.59	586.21
	0.00	223.41	380.86	100.99	92.04	243.20	404.18	102.57	98.66
	0.33	226.89	382.59	55.68	53.51	254.24	425.40	58.60	56.91
0.33	0.63	237.50	401.05	31.45	29.40	292.90	480.86	37.97	34.51
	0.93	283.41	477.53	25.17	24.51	334.08	519.38	33.61	30.61
	-0.50	221.49	377.24	153.59	145.56	256.70	435.47	126.51	126.16
	0.00	232.26	396.83	51.07	48.79	288.45	436.54	54.44	52.06
	0.33	236.45	398.80	32.84	31.17	294.79	486.40	35.38	33.03
0.63	0.63	250.90	419.64	22.17	21.68	331.24	544.43	25.29	23.86
	0.93	310.16	524.50	20.36	19.84	377.82	631.81	26.47	25.20
	-0.50	234.69	387.63	52.49	48.42	273.17	443.02	55.46	54.16
	0.00	261.33	434.49	31.60	29.72	330.36	506.62	35.81	33.41
	0.33	284.47	480.15	26.10	25.54	336.41	524.36	32.74	30.77
0.93	0.63	308.30	525.11	20.79	20.46	380.97	641.71	28.81	27.30
	0.93	374.85	638.27	19.31	19.12	408.94	694.73	22.78	21.17
	-0.50	282.35	471.41	36.56	34.76	326.12	540.34	40.88	37.09
	0.00	217.27	370.52	1212.11	1160.58	253.31	426.77	598.41	584.07
	0.33	220.01	378.78	152.46	143.52	257.67	434.26	125.83	129.67
-0.50	0.63	237.48	388.60	51.98	51.09	275.24	445.14	55.45	53.66
	0.93	283.18	469.51	34.97	33.25	327.77	551.84	39.26	38.11
	-0.50	245.71	394.02	2857.32	2771.11	245.43	400.34	2858.08	2815.77

4.1.3. Discusión de resultados

Este trabajo toma como punto de referencia el estudio hecho por [Vanhatalo y Kulahci \(2015\)](#), quienes centraron su atención en la evaluación del rendimiento de la carta T^2 y otras variantes para datos autocorrelacionados generados a través de un modelo VAR(1) bajo la suposición de normalidad. Los resultados que aquí se hallan son un tanto congruentes con los de estos autores. Otra investigación que también aplicó el mismo enfoque de estimación de parámetros para comparar los diagramas T^2 , MEWMA y MCUSUM fue la efectuada por [Moraesa et al. \(2015\)](#), pero a diferencia de la presente disertación, su procedimiento de simulación sólo insirió la autocorrelación en la segunda fase de monitoreo, es decir, verificaron el rendimiento de las gráficas de control cuando el proceso a supervisar en línea se ve perturbado por la autocorrelación. Esto puede expli-

4.1. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

TABLA 4.7: Valores de ARL_0 con observaciones Gamma bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 1$).

Φ		$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$			
ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM
0.00	0.00	55.07	359.01	277.64	264.67	55.98	361.65	279.56	270.23
	0.33	58.16	373.91	80.53	73.79	63.66	399.17	78.48	79.46
	0.63	60.76	385.76	42.37	39.25	75.43	420.83	43.82	40.58
	0.93	67.58	420.41	24.87	23.04	85.41	486.87	28.30	26.58
	-0.50	55.93	358.52	940.01	894.02	65.33	414.45	469.66	458.27
0.33	0.00	57.92	370.54	78.77	71.38	63.23	395.11	80.48	77.12
	0.33	58.82	372.22	43.43	41.50	66.10	415.85	45.98	44.49
	0.63	61.57	390.18	24.53	22.80	76.15	470.06	29.79	26.98
	0.93	73.47	464.59	19.63	19.01	86.86	507.71	26.37	23.93
	-0.50	57.42	367.02	119.81	112.89	66.74	425.69	99.26	98.63
0.63	0.00	60.21	386.07	39.84	37.84	74.99	426.74	42.71	40.70
	0.33	61.30	387.99	25.62	24.18	76.64	475.48	27.76	25.82
	0.63	65.04	408.27	17.29	16.81	86.12	532.20	19.84	18.65
	0.93	80.41	510.28	15.88	15.38	98.23	617.62	20.77	19.70
	-0.50	60.84	377.12	40.94	37.55	71.02	433.07	43.51	42.34
0.93	0.00	67.75	422.71	24.65	23.05	85.89	495.24	28.09	26.12
	0.33	73.75	467.14	20.36	19.80	87.46	512.59	25.68	24.05
	0.63	79.92	510.88	16.21	15.87	99.05	627.30	22.60	21.35
	0.93	97.18	620.97	15.06	14.83	106.32	679.13	17.87	16.55
	-0.50	73.20	458.64	28.51	26.96	84.79	528.20	32.07	28.99
-0.50	0.00	56.33	360.48	945.47	900.08	65.86	417.19	469.51	456.60
	0.33	57.03	368.52	118.92	111.31	66.99	424.51	98.73	101.37
	0.63	61.56	378.07	40.54	39.62	71.56	435.14	43.50	41.95
	0.93	73.41	456.79	27.28	25.78	85.22	539.45	30.81	29.79
	-0.50	63.70	383.35	2228.76	2149.12	63.81	391.34	2242.44	2201.25

car el porqué sus resultados apuntaron a que las cartas de control evaluadas incrementan la proporción de falsas alarmas ante la presencia de autocorrelación. Poco es lo que se sabe acerca del desempeño de las gráficas MEWMA y MCUSUM para datos autocorrelacionados. [Kim et al. \(2012\)](#) mostraron que la carta MCUSUM no es competente contra métodos alternativos para monitorear observaciones autocorrelacionadas positivamente. Igualmente [Boone \(2010\)](#) lo corroboró para la carta MEWMA, ya que en ambos casos la tasa de falsas alarmas crece enormemente. Debe advertirse que estas afirmaciones se apoyaron del conocimiento de los parámetros μ y $\Gamma(0)$, aunque, por lo visto en los resultados de este escrito, cuando se estiman estos parámetros se sufragan las mismas repercusiones. Un hallazgo curioso es el comportamiento de los esquemas MEWMA y MCUSUM con mediciones que tienen inducida autocorrelación negativa, ARL 's en control

TABLA 4.8: Valores de ARL_0 con observaciones Gamma bivariadas y diferentes grados de autocorrelación ($\nu = 16$).

Φ		$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$				$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$			
ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM
	0.00	198.07	364.01	362.94	350.52	200.98	365.65	365.76	353.23
	0.33	209.19	379.12	105.27	97.72	228.55	403.58	102.67	103.86
0.00	0.63	218.53	391.13	55.38	51.98	270.81	425.48	57.33	53.04
	0.93	243.05	426.26	32.51	30.51	306.64	492.25	37.03	34.74
	-0.50	201.16	363.51	1228.81	1184.02	234.53	419.03	614.47	599.03
	0.00	208.31	375.70	102.98	94.53	227.00	399.48	105.29	100.81
	0.33	211.55	377.41	56.78	54.96	237.31	420.45	60.15	58.15
0.33	0.63	221.45	395.61	32.07	30.19	273.39	475.26	38.98	35.26
	0.93	264.25	471.06	25.67	25.17	311.83	513.33	34.50	31.27
	-0.50	206.51	372.13	156.62	149.50	239.61	430.40	129.86	128.92
	0.00	216.56	391.45	52.08	50.12	269.24	431.46	55.88	53.20
	0.33	220.46	393.40	33.49	32.02	275.16	480.73	36.32	33.75
0.63	0.63	233.94	413.96	22.60	22.27	309.18	538.09	25.96	24.38
	0.93	289.20	517.39	20.76	20.38	352.65	624.45	27.17	25.75
	-0.50	218.83	382.37	53.52	49.73	254.98	437.86	56.93	55.34
	0.00	243.67	428.60	32.23	30.53	308.36	500.72	36.76	34.14
	0.33	265.24	473.65	26.61	26.23	314.00	518.26	33.60	31.44
0.93	0.63	287.46	518.00	21.19	21.01	355.60	634.24	29.57	27.90
	0.93	349.52	629.62	19.69	19.64	381.71	686.64	23.38	21.63
	-0.50	263.26	465.03	37.27	35.70	304.40	534.05	41.96	37.90
	0.00	202.59	365.50	1235.95	1192.03	236.44	421.80	614.28	596.84
	0.33	205.13	373.65	155.46	147.41	240.51	429.20	129.17	132.51
-0.50	0.63	221.43	383.34	53.00	52.47	256.91	439.95	56.92	54.83
	0.93	264.04	463.15	35.66	34.15	305.94	545.41	40.30	38.94
	-0.50	229.10	388.69	2913.51	2846.22	229.08	395.67	2933.88	2877.36

pero con una pobre sensibilidad para reconocer desplazamientos en la media. Quizás este patrón se deba a la afectación que pueden causar las observaciones continuas de signos alternos en las sumas acumuladas y en la ponderación del valor actual con el promedio histórico. Cuando no hay evidencia de autocorrelación, la efectividad de la carta MEWMA ejecutada con datos que siguen distribuciones extremadamente pesadas o muy asimétricas puede estar a la altura de su desempeño bajo normalidad seleccionando adecuadamente el valor del parámetro λ . [Stoumbos y Sullivan \(2002\)](#) sugieren que cantidades de λ menores que 0.02 garantizan un recomendable rendimiento. Para terminar, se cumplió con el intento de explorar, bajo ciertas condiciones se simulación, el riesgo que se corre al implementar la gráfica r con mediciones autocorrelacionadas, el cual produce, de manera general, retrasos en el tiempo que toma para localizar la inestabilidad

4.1. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

TABLA 4.9: Valores de ARL_1 con observaciones Gamma bivariadas, diferentes grados de autocorrelación y magnitudes de cambio considerando $\nu = 1$ y $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0.9$.

Φ		$\lambda = 0.25$						$\lambda = 0.50$						$\lambda = 2$						$\lambda = 3$					
		ϕ_{11}	ϕ_{22}	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM	T^2	r	MEWMA	MCUSUM		
0.00	0.33	55.15	124.96	147.56	174.89	57.18	50.97	53.09	63.29	27.19	6.77	8.14	9.15	4.25	2.77	5.12	6.45	6.45	9.15	4.25	2.77	5.12	6.45		
0.33	0.63	62.72	137.92	41.42	51.42	65.02	56.26	14.90	18.61	30.92	7.47	8.25	10.96	4.83	3.06	4.09	5.71	5.71	10.96	4.83	3.06	4.09	5.71		
0.00	0.63	74.31	145.41	23.13	26.26	77.05	59.31	8.32	9.50	36.64	7.88	7.13	9.02	5.73	3.22	3.27	4.49	4.49	9.02	5.73	3.22	3.27	4.49		
0.93	0.63	84.14	168.23	14.94	17.20	87.24	68.62	5.37	6.22	41.48	9.11	6.32	8.32	6.48	3.73	3.85	3.98	3.98	8.32	6.48	3.73	3.85	3.98		
-0.50	0.63	64.36	143.20	247.90	296.59	66.73	58.41	89.19	107.33	31.73	7.76	23.88	29.84	4.96	3.17	12.44	18.21	18.21	29.84	4.96	3.17	12.44	18.21		
0.00	0.00	62.29	136.52	42.48	49.91	64.58	55.69	15.28	18.06	30.71	7.40	8.26	10.84	4.80	3.03	4.26	5.76	5.76	10.84	4.80	3.03	4.26	5.76		
0.33	0.33	65.12	143.69	24.27	28.79	67.52	58.61	8.73	10.42	32.11	7.78	7.97	9.22	5.02	3.19	3.92	4.88	4.88	9.22	5.02	3.19	3.92	4.88		
0.63	0.63	75.02	162.42	15.72	17.46	77.78	66.25	5.66	6.32	36.99	8.80	6.70	8.34	5.78	3.60	3.92	4.01	4.01	8.34	5.78	3.60	3.92	4.01		
0.93	0.93	85.57	175.43	13.92	15.48	88.72	71.56	5.01	5.60	42.19	9.50	6.49	8.19	6.59	3.89	3.64	3.94	3.94	8.19	6.59	3.89	3.64	3.94		
-0.50	0.63	65.75	147.09	52.39	63.83	68.17	60.00	18.85	23.10	32.42	7.97	9.31	11.92	5.07	3.26	5.78	6.41	6.41	23.10	32.42	7.97	9.31	11.92		
0.00	0.00	73.88	147.45	22.54	26.34	76.60	60.14	8.11	9.53	36.42	7.99	7.19	9.03	5.69	3.27	3.64	4.43	4.43	9.03	5.69	3.27	3.64	4.43		
0.33	0.33	75.50	164.29	14.65	16.71	78.28	67.01	5.27	6.05	37.23	8.90	6.94	8.29	5.82	3.64	3.94	3.96	3.96	8.29	5.82	3.64	3.94	3.96		
0.63	0.63	84.84	183.89	10.47	12.07	87.96	75.01	3.77	4.37	41.83	9.96	6.65	7.93	6.54	4.08	3.25	3.91	3.91	7.93	6.54	4.08	3.25	3.91		
0.93	0.93	96.77	213.41	10.96	12.75	100.33	87.05	3.94	4.61	47.71	11.56	6.76	7.98	7.46	4.73	3.17	3.89	3.89	7.98	7.46	4.73	3.17	3.89		
-0.50	0.63	69.97	149.64	22.97	27.40	72.54	61.04	8.26	9.92	34.50	8.11	7.16	9.11	5.39	3.32	3.97	4.24	4.24	9.11	5.39	3.32	3.97	4.24		
0.00	0.00	84.62	171.12	14.83	16.90	87.73	69.80	5.34	6.12	41.72	9.27	6.01	8.30	6.52	3.79	3.91	3.97	3.97	8.30	6.52	3.79	3.91	3.97		
0.33	0.33	86.16	177.11	13.56	15.57	89.34	72.24	4.88	5.63	42.48	9.60	7.84	8.20	6.64	3.93	3.08	3.98	3.98	8.20	6.64	3.93	3.08	3.98		
0.63	0.63	97.58	216.75	11.93	13.81	101.17	88.41	4.29	5.00	48.11	11.74	6.74	8.06	7.52	4.80	3.47	3.95	3.95	8.06	7.52	4.80	3.47	3.95		
0.93	0.93	104.74	234.66	9.43	10.71	108.60	95.71	3.39	3.88	51.64	12.71	7.88	7.82	8.07	5.20	3.70	3.75	3.75	7.82	8.07	5.20	3.70	3.75		
-0.50	0.63	83.53	182.51	16.93	18.76	86.60	74.44	6.09	6.79	41.18	9.89	6.89	8.45	6.44	4.05	3.66	3.96	3.96	8.45	6.44	4.05	3.66	3.96		
0.00	0.00	64.88	144.15	247.82	295.51	67.27	58.80	89.16	106.94	31.99	7.81	23.28	29.76	5.00	3.20	12.33	18.16	18.16	29.76	5.00	3.20	12.33	18.16		
0.33	0.33	66.00	146.68	52.11	65.61	68.43	59.83	18.75	23.74	32.54	7.95	9.37	12.05	5.09	3.25	5.74	6.38	6.38	12.05	5.09	3.25	5.74	6.38		
0.63	0.63	70.50	150.35	22.96	27.15	73.09	61.33	8.26	9.82	34.76	8.15	7.11	9.09	5.43	3.33	3.99	4.25	4.25	9.09	5.43	3.33	3.99	4.25		
0.93	0.93	83.95	186.39	16.26	19.28	87.04	76.03	5.85	6.98	41.39	10.10	7.00	8.48	6.47	4.13	3.69	3.99	3.99	8.48	6.47	4.13	3.69	3.99		
-0.50	0.63	62.86	135.22	1183.63	1424.63	65.18	55.16	425.85	515.55	30.99	7.33	80.19	116.72	4.84	3.00	49.24	76.07	76.07	116.72	4.84	3.00	49.24	76.07		

del proceso, con especial énfasis en cambios pequeños. No obstante, se puede ver que en procesos donde se valida el supuesto de independencia, el método no paramétrico estudiado muestra un rendimiento competitivo cuando se viola o no la suposición de normalidad. Desde luego que la ventaja clave de esta carta de control es la transición de las profundidades de los datos a rangos que mantienen la distribución Uniforme sin reparar demasiado en el tipo de distribución continua de dichos datos, sin embargo, como hace hincapié Liu (1995), mientras más cercana esté la distribución subyacente de la distribución elíptica, entonces es más eficiente usar la profundidad de Mahalanobis. De aquí que se haya visto para observaciones independientes t que la gráfica r exhibe un similar ARL dentro de control y una conservadora tasa de falsas alarmas comparado con datos distribuidos Gamma.

4.2. Ejemplo de aplicación

A fin de ilustrar exclusivamente la construcción de las cuatro gráficas de control con datos reales, más no de integrar los resultados de la simulación, en esta sección se presenta un breve ejercicio de aplicación a un proceso bivariado continuo que carece del cumplimiento de los supuestos de normalidad bivariada e independencia.

4.2.1. Descripción de los datos

Los datos que se analizan fueron obtenidos de la tesis doctoral de Boone (2010) y provienen de un proceso generador de energía hidroeléctrica, en el cual el agua fluye hacia una presa a través de una tubería que obliga a una turbina girar. Este giro brinda energía cinética que luego se transfiere a energía eléctrica mediante un generador. Ha sido del interés de los ingenieros del proceso monitorear la velocidad de flujo del agua (en litros por segundo) y la potencia (en kilovatios) de dicho generador. Las variables se denotan por X_1 y X_2 respectivamente. Estas variables están típicamente correlacionadas, ya que un mayor caudal produce una cantidad más grande de energía generada. Además, debido a que las medidas recientes de la velocidad de flujo determinan la velocidad de flujo actual, los datos de ambas variables están autocorrelacionados. Los ingenieros disponen de una pequeña BDH conformada por 50 observaciones que suponen se encuentra en estado de control, esta información se muestra en la Tabla 4.10 o bien gráficamente en la Figura 4.1.

TABLA 4.10: Datos históricos del ejemplo de aplicación.

Tiempo	X_1	X_2												
1	21.50	3.31	11	24.60	2.94	21	27.02	2.95	31	17.67	1.10	41	24.50	1.16
2	26.74	3.45	12	28.71	2.92	22	32.43	4.15	32	23.96	3.18	42	22.00	3.45
3	30.65	4.46	13	24.69	2.03	23	27.10	3.68	33	29.10	3.50	43	24.91	3.92
4	28.01	4.03	14	24.55	2.10	24	26.00	2.80	34	28.90	3.45	44	20.50	2.94
5	23.85	2.75	15	22.05	2.72	25	26.70	2.83	35	29.55	3.94	45	26.84	2.86
6	28.00	2.68	16	24.65	2.75	26	24.65	2.82	36	27.02	4.42	46	26.30	1.90
7	29.10	3.75	17	28.50	4.05	27	24.56	2.84	37	17.81	3.83	47	18.56	3.07
8	23.56	2.91	18	31.50	2.83	28	24.80	2.09	38	21.03	3.46	48	20.20	3.08
9	27.91	3.81	19	29.18	3.10	29	28.00	3.68	39	27.49	3.31	49	19.10	3.30
10	25.00	3.62	20	23.21	3.20	30	30.91	3.45	40	25.00	1.22	50	22.60	4.00

4.2. EJEMPLO DE APLICACIÓN

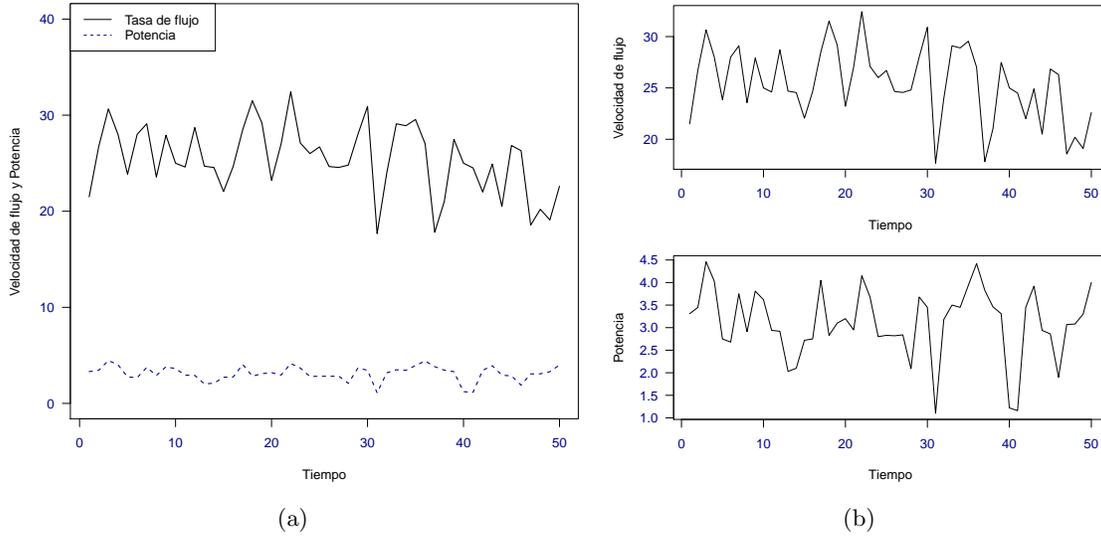


FIGURA 4.1: Velocidades de flujo y potencias del generador reportadas en la BDH.

Inicialmente, se probó si las mediciones de X_1 y X_2 son o no independientes. Para ello se utilizó el test de Box-Pierce, que establece en la hipótesis nula, H_0 , que los datos en turno se distribuyen de forma independiente. Con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ la hipótesis nula se rechazó en el par de variables. La autocorrelación calculada para X_1 fue 0.25 y 0.30 para X_2 . En busca de determinar si las series son o no estacionarias, se hizo uso de la prueba de Dickey-Fuller aumentada, que prueba la H_0 de que la serie no es estacionaria. Una vez más, con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, las observaciones de velocidad y potencia abogaron por el rechazo de H_0 .

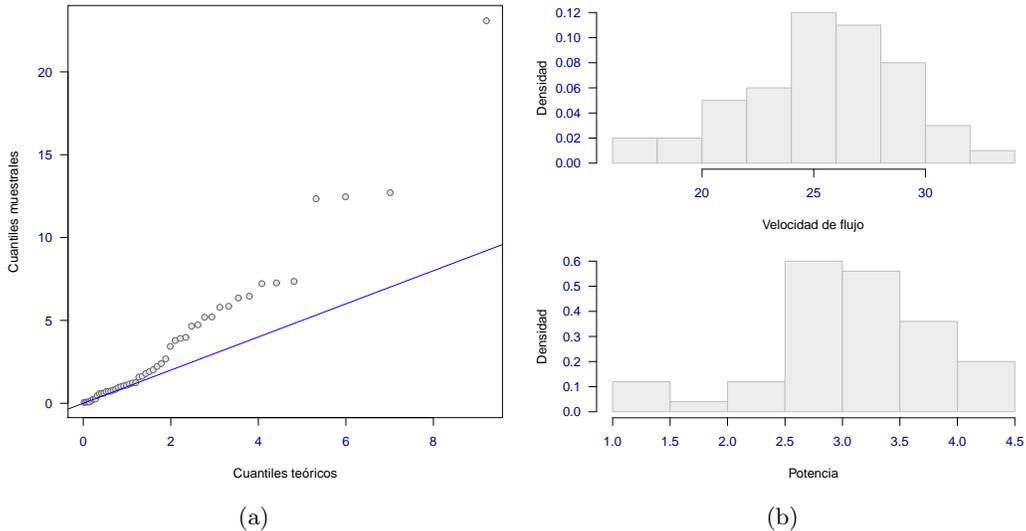


FIGURA 4.2: Distribución conjunta y univariada de las velocidades de flujo y potencias del generador reportadas en la BDH.

La distribución de los datos bivariados visualizada en la Figura 4.2 parece indicar que no es del todo Normal, aunque se percibe ligeramente un mayor comportamiento simétrico en las velocidades de flujo que en las potencias. Dicho esto, se procede a alimentar los cuatro sistemas de control, empleando \bar{X} y S obtenidas de la BDH, con nuevas observaciones de X_1 y X_2 emanadas del proceso monitoreado.

4.2.2. Implementación de cartas de control

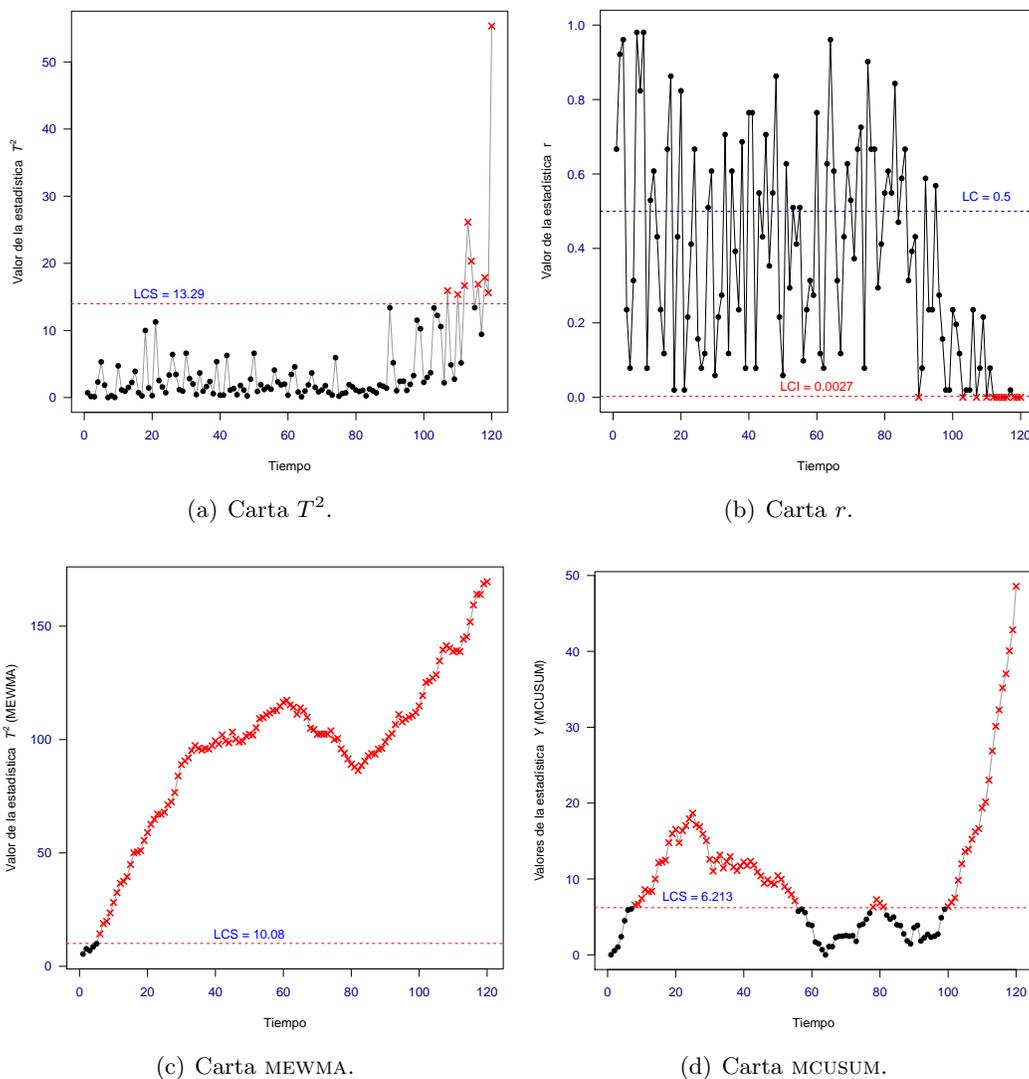


FIGURA 4.3: Monitoreo del proceso de energía hidroeléctrica en fase II ($\alpha = 0.0027$).

En Anexos código 1 se encuentran los programas de apoyo con los que se obtienen las estadísticas de monitoreo de cada gráfica de control. La Figura 4.3 es un ejemplo de lo difícil que puede llegar a ser para un ingeniero de proceso la interpretación del estado del proceso ante los diferentes resultados que exhiben las cuatro cartas de control.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Los resultados de la simulación efectuada en este estudio proporcionan, en primer término, una clara advertencia a los ingenieros de procesos que confían en los esquemas de control T^2 , MEWMA y MCUSUM, en sus versiones más sencillas, para monitorear procesos de múltiples respuestas continuas que asumen que las suposiciones de NMV e independencia son válidas, aun cuando no existe evidencia suficiente para determinar que los datos pueden considerarse independientes y normales.

La calibración de los cuatro métodos de control en circunstancias de normalidad y autocorrelación, expone un rendimiento bajo control que se degrada sustancialmente por el aumento de la proporción de falsas alarmas en las gráficas con memoria y una disminución significativa de esta proporción para las cartas T^2 y r , sin embargo, en éstas dos últimas decrecen su capacidad nominal de detección de cambio para altas cantidades de autocorrelación. La violación del supuesto de normalidad e independencia conduce a una excesiva sensibilidad de las gráficas paramétricas que se refleja con la presencia de muchas falsas alarmas. La carta r , en contraste, no aparenta ser una mala opción. Es altamente competente para situaciones deseables de normalidad e independencia. Cuando no se puede sostener la independencia entre observaciones normales o no, se encontró que capta los cambios medios de forma rápida y que resulta ser especialmente más efectiva, que el resto de los métodos de control, para cambios grandes en datos bivariados que tienen baja y regular autocorrelación.

Lo anterior sugiere, razonablemente, concluir que hay más trabajo por indagar y desarrollar en el campo de sistemas de monitoreo no paramétricos para mediciones no independientes bajo el enfoque de medidas de profundidad. Asimismo, se extiende una vertiente de investigación que podría iniciarse examinando algunas de las brechas que este trabajo no alcanzó a cubrir y, que en su lugar, se brindan a continuación como áreas de oportunidad:

- Este estudio sólo consideró el caso bivariado con fines prácticos, pero las propiedades de rendimiento y robustez de estas gráficas pueden ser ligeramente diferentes para datos de dimensiones más grandes, así que se recomienda ampliarlo, por ejemplo, al caso de tres y cinco variables.
- Usar matrices Φ con elementos distintos de cero fuera de la diagonal principal, con la precaución de que los valores característicos de esta matriz sean menores que uno en valor absoluto. Adicionalmente, colocar cifras negativas bajas, regulares y altas en los elementos de la diagonal principal.

- La simulación del proceso fuera de control en este trabajo se realizó desplazando las medias en ambas variables con la misma dimensión. Una situación más realista puede ser generando cambios en una sola variable y cambios en ambas pero alternando la magnitud del desplazamiento.
- Incorporar, en un marco comparativo establecido por ARL's, procedimientos de monitoreo que ya mitigan la falta de algunos de los supuestos y valorar su robustez con respecto al otro, por ejemplo, la carta T^2 basada en bootstrap que mejora su desempeño ante la ausencia de normalidad (Kim *et al.*, 2011), cartas de control combinadas con técnicas de minería de datos resarcan el daño de la autocorrelación (Kim *et al.*, 2012) y el diagrama de control Z que también es bastante insensible a la presencia de autocorrelación (Kalgonda y Kulkarni, 2004).
- Inducir otras formas distribucionales en el vector del ruido blanco del modelo VAR, tales como las distribuciones multivariadas Uniforme, Beta, Lognormal y Normal asimétrica. Algunas de éstas han sido consideradas para datos independientes en los artículos de Nid-sunkid *et al.* (2018) y Kim *et al.* (2011).
- Evaluar la sensibilidad del esquema de control r perturbando conjuntamente el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas de procesos que presentan o no autocorrelación.
- Es posible que alguna clase de ajuste necesiten los límites de control de la gráfica r para mejorar la rapidez con la que identifica nominalmente señales de detección de cambios pequeños, ¿Cómo ajustar adecuadamente los límites de control de la carta r basada en la profundidad de Mahalanobis para datos autocorrelacionados? es otra importante pregunta que inviste toda una investigación a seguir.

Capítulo 6

Bibliografía

- ALT, F. B. (1985). *Multivariate quality control*. In: S. Kotz and N. L. Johnson (Eds) *Encyclopedia of Statistical Sciences*. New York: John Wiley & Sons.
- ALTUKIFE, F. S. (2003). Nonparametric control charts based on sum of ranks. *Pakistan Journal of Statistics* **19**, 291–300.
- ALWAN, L. C. Y ROBERTS, H. V. (1988). Time series modeling for detection of level shifts of autocorrelated processes. *Journal of Business and Economics Statistics* **6**, 87–96.
- BAJGIER, S. M. (1992). The use of bootstrapping to construct limits on control charts. *Proceedings of the Decision Science Institute*, 1611–1613.
- BAKIR, S. T. (2004). A distribution-free Shewhart quality control chart based on signed-ranks. *Quality Engineering* **16**(4), 613–623.
- BAKIR, S. T. Y REYNOLDS, M. R. (1979). A nonparametric procedure for process control based on within-group ranking. *Technometrics* **21**(2), 175–183.
- BARNETT, V. (1976). The ordering of multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society* **139**(3), 318–355.
- BERSIMIS, S., PSARAKIS, S. Y PANARETOS, J. (2007). Multivariate statistical process control charts. *Quality and Reliability Engineering International* **23**, 517–543.
- BOONE, J. (2010). *Contributions to multivariate control charting, studies of the Z chart and four nonparametric charts*. Tuscaloosa, Alabama: PhD Thesis. University of Alabama.
- BOONE, J. Y CHAKRABORTI, S. (2012). Two simple Shewhart type multivariate nonparametric control charts. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **28**(2), 130–140.
- BOX, G. E. P., JENKINS, G. M., REINSEL, G. C. Y LJUNG, G. M. (2015). *Time series analysis: forecasting and control*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- BURR, I. W. (1967). The effect of non-normality on constants for \bar{X} and r charts. *Industrial Quality Control* **24**, 563–569.
- CHAKRABORTI, S., BAKIR, S. T. Y VAN DER LAAN, P. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results. *Journal of Quality Technology* **33**(3), 304–315.
- CHAKRABORTI, S., HUMAN, W. Y A, G. M. (2009). Phase I statistical process control charts: an overview and some results. *Quality Engineering* **21**, 52–62.
- CHAKRABORTI, S. Y VAN DE WIEL, M. A. (2008). A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney statistic. *Institute of Mathematical Statistics* **1**, 156–172.
- CHAN, L. K. Y LI, G. Y. (1994). A multivariate control chart for detecting linear trends. *Communications in Statistics: Simulation and Computations* **23**, 997–1012.

- CHARNES, J. M. (1995). Test for special causes with multivariate autocorrelated data. *Computers and Operational Research* **22**, 443–453.
- CHOU, Y. M., MASON, R. L. Y C, Y. J. (1999). Power comparisons for a Hotelling's T^2 statistic. *Communicationos in Statistics: Simulation and Computations* **28**, 1031–1050.
- CHOU, Y. M., MASON, R. L. Y YOUNG, J. C. (2001). The control chart for individual observations from a multivariate non-normal distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods* **30**(8), 1937–1949.
- CROSIER, R. (1988). Multivariate generalization of cumulative sum quality control. *Technometrics* **30**(3), 291–303.
- DAI, Y., WANG, Z. Y ZHOU, C. (2004). Multivariate CUSUM control charts based on data depth for preliminary analysis. *The Natural Sciences Foundation of Tianjin* , 1–18.
- DJAUHARI, M. A. (2008). A robust estimation of location and scatter. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences* **2**(1), 1–24.
- GENZ, A., BRETZ, F., MIWA, T., MI, X., LEISCH, F., SCHEIPL, F., BORNKAMP, B., MAECHLER, M., HOTHORN, T. Y HOTHORN, M. T. (2019). Package mvtnorm. *Journal of Computational and Graphical Statistics* **11**, 950–971.
- GUTIÉRREZ-PULIDO, H. Y DE LA VARA-SALAZAR, R. (2009). *Control estadístico de la calidad y seis sigma*. (Segunda edición). México: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- HAMURKAROGLU, C., MERT, M. Y SAYKAN, Y. (2004). Nonparametric control charts based on Mahalanobis depth. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* **33**, 57–67.
- HARRIS, T. J. Y ROSS, W. H. (1991). Statistical process control procedures for correlated observations. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **69**, 48–57.
- HAYTER, A. J. Y TSUI, K. L. (1994). Identification and quantification in multivariate quality control problems. *Journal of Quality Technology* **26**, 197–208.
- HOTELLING, H. (1947). *Multivariate quality control: techniques of statistical*. New York: McGraw-Hill.
- JACKSON, J. E. (1985). Multivariate quality control. *Communicationos in Statistics: Theory and Methods* **14**, 2657–2688.
- JOHNSON, R. A. Y BAGSHAW, M. (1974). The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests. *Technometrics* **16**, 103–112.
- JONES, L. A. Y WOODALL, W. H. (1998). The performance of bootstrap control charts. *Journal of Quality Technology* **30**, 362–375.
- KALGONDA, A. A. Y KULKARNI, S. R. (2004). Multivariate quality control chart for autocorrelated processes. *Journal of Applied Statistics* **31**, 317–327.
- KIM, S. B., CHEN, V. C. P., PHALADIGANON, P., BAEK, J. G. Y PARK, S. K. (2011). Bootstrap-based T^2 multivariate control charts. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **40**, 645–662.
- KIM, S. B., JITPITAKLERT, W., PARK, S. Y. Y HWANG, S. J. (2012). Data mining model-based control charts for multivariate and autocorrelated processes. *Expert systems with applications* **39**, 2073–2081.
- KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N. Y JOHNSON, N. L. (2004). *Continuous multivariate distributions, models and applications*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- KOTZ, S. Y NADARAJAH, S. (2000). *Multivariate t-distributions and their applications*. Cambridge University Press.
- LEE, M. H. Y KHOO, M. B. C. (2006a). Optimal statistical design of a multivariate CUSUM chart based on ARL and MRL. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* **13**(5), 479–497.

BIBLIOGRAFÍA

- LEE, M. H. Y KHOO, M. B. C. (2006b). Optimal statistical design of a multivariate EWMA chart based on ARL and MRL. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **35**, 831–847.
- LIU, R. (1990). On a notion of data depth based on random simplicities. *The Annals of Statistics* **18**, 405–414.
- LIU, R. (1992). Data depth and multivariate rank test. *Statistics and Related Methods* , 279–294.
- LIU, R. (1995). Control charts for multivariate processes. *Journal of The American Statistical Association* **90**, 1380–1387.
- LIU, R., PARELIUS, J. M. Y SINGH, K. (1999). Multivariate analysis by data depth: descriptive statistics, graphics and inference. *The Annals of Statistics* **27**(3), 753–858.
- LIU, R. Y SINGH, K. A. (1993). A quality index based on data depth and multivariate rank tests. *Journal of The American Statistical Association* **88**, 252–260.
- LIU, R. Y. (2003). Multivariate control charts: Hotelling T^2 , data depth and beyond. *Statistics in Industry* **22**, 573–593.
- LIU, R. Y., SINGH, K. Y TENG, J. H. (2004). DDMA-charts: nonparametric multivariate moving average control charts based on data depth. *Allgemeines Statistisches Archiv* **88**(2), 235–258.
- LIU, R. Y. Y TANG, J. (1996). Control charts for dependent and independent measurements based on the bootstrap. *Journal of the American Statistical Association* **91**, 1694–1700.
- LOWRY, C. A., WOODALL, W. H., CHAMP, C. W. Y RIGDON, S. E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* **34**(1), 46–53.
- LU, C. W. Y REYNOLDS, M. R. J. (1999). Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes. *Journal of Quality Technology* **31**, 259–274.
- MAHMOUD, M. A. Y MARAVELAKIS, P. E. (2010). The performance of the MEWMA control chart when parameters are estimated. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **39**(9), 1803–1817.
- MAHMOUD, M. A. Y MARAVELAKIS, P. E. (2013). The performance of the MCUSUM control chart with parameters are estimated. *Journal of Statistical Computation and Simulation* **83**(4), 721–738.
- MARAGAH, H. D. Y WOODALL, W. H. (1992). The effect of autocorrelation of the retrospective X chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation* **40**, 29–42.
- MARROQUÍN-PRADO, E. Y CANTÚ-SIFUENTES, M. (2010). Una gráfica de control combinada para identificar señales fuera de control en procesos multivariados. *Ingeniería, Investigación y Tecnología* **11**(4), 453–460.
- MASON, R. L., CHAMP, C. W., TRACY, N. D., WIERDA, S. J. Y YOUNG, J. C. (1997). Assessment of multivariate process control techniques. *Journal of Quality Technology* **29**(2), 140–143.
- MASON, R. L., TRACY, N. D. Y YOUNG, J. C. (1995). Descomposition of T^2 for multivariate control chart interpretation. *Journal of Quality Technology* **27**(2), 99–108.
- MASON, R. L. Y YOUNG, J. C. (2000). Interpretive features of a T^2 chart in multivariate SPC. *Quality Progress* **33**(4), 84–89.
- MASON, R. L. Y YOUNG, J. C. (2002). *Multivariate statistical process control with industrial applications*. Philadelphia: SIAM.
- MASTRANGELO, C. M. Y FORREST, D. R. (2002). Multivariate autocorrelated processes: data and shift generation. *Journal of Quality Technology* **34**, 216–220.
- MESSAOUD, A., THEIS, W., WEIHS, C. Y HERING, F. (2005). Application and use of multivariate control charts in a bta deep hole drilling process. *In Classification the Ubiquitous Challenge*. Springer , 648–655.

- MILLER, K., ROUSSEUW, P., STRUFY, A., RAMASWAMI, S., SELLALES, J. A., SOUVAINE, D. Y STREINU, I. (2003). Efficient computation of location depth contours by methods of computational geometry. *Statistics and Computing* **13**, 153–162.
- MONTGOMERY, D. C. (2009). *Introduction to statistical quality control*. (Sixth edition). Arizona: John Wiley & Sons.
- MONTGOMERY, D. C., BORROR, C. M. Y RUNGER, G. C. (1999). Robutness of the EWMA control chart to non-normality. *Journal of Quality Technology* **31**, 309–316.
- MONTGOMERY, D. C. Y MASTRANGELO, C. M. (1991). Some statistical process control methods for autocorrelated data. *Journal of Quality Technology* **23**, 179–193.
- MORAESA, D. A. O., OLIVEIRAB, F. L. P. Y DUCZMALC, L. H. (2015). On the Hotelling T^2 , MCUSUM and MEWMA control charts performance with different variability sources. *Brazilian Journal of Operations & Production Management* **12**(2), 196–212.
- MOSLER, K. (2002). *Multivariate Dispersion, Central Regions and Depth: The Lift Zonoid Approach*. New York: Springer-Verlag.
- MOSLER, K. (2013). Depth statistics. *Robustness and Complex Data Structures* , 17–34.
- MURAKAMI, H. Y MATSUKI, T. (2010). A nonparametric control chart based on the Mood statistic for dispersion. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* **49**(5), 757–763.
- MURPHY, B. J. (1987). Screening our of control variables with T^2 multivariate quality control procedures. *Journal of the Royal Statistical Society* **36**, 571–583.
- MUTHUKRISNAN, R. Y POONKUZHALI, G. (2017). Computing robust measure of multivariate location: data depth approach. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics* **13**(2), 691–700.
- NIDSUNKID, S., BORKOWSKI, J. J. Y BUDSABA, K. (2018). The performance of MCUSUM control charts when the multivariate normality assumption is violated. *Thailand Statistician* **16**(2), 140–155.
- PALM, A. C. (1990). Tables of run length percentiles for determining the sensitivity of Shewhart control charts for averages with supplementary runs rules. *Journal of Quality Technology* **22**, 289–298.
- PAN, X. (2002). VAR chart: a quality control chart monitoring multivariate autocorrelated processes. *Decision Sciences Institute* **1**, 2377–2382.
- PAN, X. Y JARRET, J. E. (2006). The quality control chart for monitoring multivariate autocorrelated processes. *Computational Statistics and Data Analysis* **51**, 3862–3870.
- PARELIUS, J. M. (1997). *Multivariate analysis based on data depth*. New Jersey: PhD Thesis. University of Rutgers.
- PIÑA-MONARREZ, M. R. (2013). Practical decomposition method for T^2 Hotelling chart. *International Journal of Industrial Engineering* **20**(5), 401–411.
- PIÑA-MONARREZ, M. R. (2018). Generalization of the Hotelling's T^2 descomposition method to the r -chart. *International Journal of Industrial Engineering* **25**(2), 200–214.
- PIGNATIELLO, J. J. Y RUNGER, G. C. (1990). Comparisons of multivariate CUSUM charts. *Journal of Quality Technology* **22**, 173–186.
- PRABHU, S. S. Y RUNGER, G. C. (1996). A markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart. *Journal of American Statistical Association* **91**, 1701–1706.
- PRABHU, S. S. Y RUNGER, G. C. (1997). Designing a multivariate EWMA control chart. *Journal of Technology* **29**(1), 8–15.
- PSARAKIS, S. Y PAPAELONIDA, G. E. A. (2007). Spc procedures for monitoring autocorrelated processes. *Quality Technology and Quantitative Management* **4**, 501–540.

BIBLIOGRAFÍA

- QIU, P. Y HAWKINS, D. (2001). A rank-based multivariate CUSUM procedure. *Technometrics* **43**, 120–132.
- R CORE TEAM (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- RAFALIN, E. Y SOUVAINE, D. L. (2004). Computational geometry and statistical depth measures. *Theory and Applications of Recent Robust Methods*, 283–295.
- REINSEL, G. C. (1993). *Elements of multivariate time series analysis*. New York: Springer-Verlag.
- REYNOLDS, J., M R Y VANBRACKLEY, L. N. (1997). EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **26**(3), 979–1008.
- ROSSI, P. (2019). *Package bayesm*. Bayesian Inference for Marketing/Micro-Econometrics. R package version 3.1-4.
- ROUSSEEUW, P. Y STRUFY, A. (1998). Computing location depth and regression depth in higher dimensions. *Statistics and Computing* **8**(3), 193–203.
- SCHAFFER, J. R. Y KIM, M. J. (2007). Number of replications required in control chart monte carlo simulation studies. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* **36**(5), 1075–1087.
- SCHILLING, E. G. Y NELSON, P. R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of charts. *Journal of Quality Technology* **8**(4), 179–193.
- SCHMID, W. (1995a). The effect of autocorrelation on the R chart and the S^2 chart. *Statistical Papers* **10**, 140–157.
- SCHMID, W. (1995b). On the run length of a Shewhart chart for correlated data. *Statistical Papers* **36**, 111–130.
- SCHMID, W. (1997a). CUSUM control schemes for gaussian processes. *Statistical Papers* **38**, 191–217.
- SCHMID, W. (1997b). On EWMA charts for time series. *Frontiers in Statistical Quality Control* **5**, 114–137.
- SCHMID, W. Y KRAMER, H. G. (1997). EWMA charts for multivariate time series. *Sequential Analysis* **16**, 131–154.
- SCHMID, W. Y SCHONE, A. (1997). Some properties of the EWMA control chart in the presence of autocorrelation. *Annals of Statistics* **25**(3), 1277–1283.
- SEPPALA, T., MOSKOWITZ, H., PLANTE, R. Y TANG, J. (1995). Statistical process control via the subgroup bootstrap. *Journal of Quality Technology* **27**, 139–153.
- SERFLING, R. (2006). Depth functions in nonparametric multivariate inference. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **72**, 1–16.
- STOUMBOS, Z. G. Y SULLIVAN, J. H. (2002). Robutness to non-normality of the multivariate EWMA control chart. *Journal of Quality Technology* **34**(3), 260–276.
- SULLIVAN, J. H. Y WOODALL, W. H. (1996). A comparison of multivariate control charts for individual observations. *Journal of Quality Technology* **28**(4), 398–408.
- TUKEY, J. W. (1975). Mathematics and the picturing of data. *Proceedings of the International Congress of Mathematics* **2**, 523–531.
- VANHATALO, E. Y KULAHCI, M. (2015). The effect of autocorrelation on the Hotelling T^2 control chart. *Quality and Reliability Engineering International* **31**(8), 1779–1796.
- VASILOPOULOS, A. V. Y STAMBOULIS, A. P. (1978). Modification of control chart limits in the presence of data correlation. *Journal of Quality Technology* **10**(1), 20–30.
- WARDELL, D. G., MOSKOWITZ, H. Y PLANTE, R. D. (1992). Control charts in the presence of data correlation. *Management Science* **38**, 1084–1104.
- WIERINGA, J. E. (1999). *Statistical process control for serially correlated data*. Groningen: PhD Thesis. University of Groningen.

- ZERTUCHE-LUIS, F. (2008). *Sistema multivariado no paramétrico para el control de procesos*. Saltillo, Coahuila, México: Tesis doctoral. Corporación Mexicana de Investigación en Materiales. División de Estudios de Postgrado.
- ZERTUCHE-LUIS, F., CANTÚ-SIFUENTES, M. Y GALVÁN, D. (2004). A comparison of two multivariate control processes: data depth and Hotelling T^2 . *Proceedings of the 34th Conference on Computers and Industrial Engineering* , 339–344.
- ZERTUCHE-LUIS, F., CANTÚ-SIFUENTES, M. Y PIÑA-MONARREZ, M. R. (2008). A non parametrical control system for the identification of variables that cause a process shift. *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice* , 489–498.
- ZERTUCHE-LUIS, F. Y CANTÚ-SIFUENTES, M. (2008). Una comparación del desempeño de las cartas de control T^2 de Hotelling y de clasificación por rangos. *Ingeniería, Investigación y Tecnología* **9**(3), 185–195.
- ZHANG, N. F. (1998). A statistical control chart for stationary process data. *Technometrics* **40**(1), 24–38.
- ZIVOT, E. Y WANG, J. (2006). *Modeling financial time series with S-Plus*. (Second edition). Washington, USA: Springer Science and Business Media.
- ZUO, Y. Y SERFLING, R. (2000). General notions of statistical depth function. *Annals of Statistics* **28**, 461–482.

Anexos

Códigos en R

Finalmente, en este apéndice se exponen las rutinas diseñadas en R que fueron de apoyo durante el estudio de simulación.

Código 1: Estadísticas de monitoreo.

```
# Suponga que tiene ya una BDH (datos.hist) y que va supervisar las
# actuales observaciones del proceso (datos.act).

# Rutina que calcula la estadística T2 de Hotelling con parámetros estimados
# para monitorear un proceso bivariado en fase II.

Hotelling.f2 <- function(datos.hist, datos.act){
  medias.hist <- colMeans(datos.hist)
  cov.hist <- cov(datos.hist)
  inv.cov.hist <- solve(cov.hist)
  T.Hotelling <- matrix(, nrow(datos.act), 1)
  for (i in 1:nrow(datos.act)){
    T.Hotelling[i,] <- t(as.matrix(datos.act[i,]-
                                medias.hist))%*%inv.cov.hist%*%
                                as.matrix(datos.act[i,]-medias.hist)
  }
  return(T.Hotelling)
}

# Obtención del LCS de la carta T2 de Hotelling. Sea n
# el número de observaciones, p la cantidad de variables
# y alpha la tasa de falsas alarmas:

LCS.Hotelling <- function(n, p, alpha){
  cuantil.F <- qf(alpha, p, n-p, lower.tail=F)
  LCS <- ((p*(n+1)*(n-1))/(n*(n-p)))*cuantil.F
  return(LCS)
}

# Rutina que calcula la estadística de clasificación de rangos con
# parámetros estimados para monitorear un proceso bivariado en fase II.

# Obtenga primero las profundidades de Mahalanobis de la BDH:
```

Código 1: Estadísticas de monitoreo (continuación).

```

PM.hist <- function(datos.hist){
  medias.hist <- colMeans(datos.hist)
  cov.hist <- cov(datos.hist)
  inv.cov.hist <- solve(cov.hist)
  Prof.Mah.hist <- matrix(0, nrow(datos.hist), 1)
  for (i in 1:nrow(datos.hist)){
    Prof.Mah.hist[i,] <- 1/(1 + t(as.matrix(datos.hist[i,]-
      medias.hist))%%inv.cov.hist%%
      as.matrix(datos.hist[i,]-medias.hist))
  }
  return(Prof.Mah.hist)
}

# Obtenga las profundidades de los nuevos datos utilizando las estimaciones
# de la BDH:

PM.act <- function(datos.hist, datos.act){
  medias.hist <- colMeans(datos.hist)
  cov.hist <- cov(datos.hist)
  inv.cov.hist <- solve(cov.hist)
  Prof.Mah.act <- matrix(0, nrow(datos.act), 1)
  for (i in 1:nrow(datos.act)){
    Prof.Mah.act[i,] <- 1/(1 + t(as.matrix(datos.act[i,]-
      medias.hist))%%inv.cov.hist%%
      as.matrix(datos.act[i,]-medias.hist))
  }
  return(Prof.Mah.act)
}

# Obtenga la estadística r:

CR <- function(PM.hist, PM.act){
  PM.hist.ord <- sort(PM.hist)
  Clas.rangos <- matrix(, nrow(PM.act), 1)
  for (i in 1:nrow(PM.act)){
    Clas.rangos[i,] <- sum((PM.hist.ord <= PM.act[i,]))/(nrow(PM.hist) + 1)
  }
  return(Clas.rangos)
}

# Obtenga el LCI de la carta no paramétrica:

LCI.CR <- function(alpha){
  LCI <- alpha
  return(LCI)
}

# Rutina para calcular la estadística T2 de la carta MEWMA con la
# estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de la BDH:

mewma.c <- function(datos.act, lambda, Sigma.est){
  aux1 <- matrix(0, nrow(datos.act)-1, ncol(datos.act))

```

Código 1: Estadísticas de monitoreo (continuación).

```

Z0 <- rep(0, ncol(datos.act))
Z1 <- lambda*datos.act[1,]
Z <- rbind(Z0,Z1,aux1)
for (i in 3:nrow(Z)){
  Z[i,] <- lambda*datos.act[i-1,] + (1 - lambda)*Z[i-1,]
}
Z <- Z[-1,]
T2 <- matrix(0, nrow(datos.act), 1)
for (i in 1:nrow(Z)){
  SigmaZ <- (lambda/(2-lambda))*(1-(1-lambda)^(2*i))*Sigma.est
  T2[i,] <- t(Z[i,])%*%solve(SigmaZ)%*%Z[i,]
}
return(T2)
}

# Rutina para calcular la estadística Y de la carta MCUSUM con la
# estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de la BDH:

mcusum.c <- function(datos.act, k, a, Sigma.est){
  k <- k
  a <- a
  St <- matrix(0, nrow(datos.act)+1, ncol(datos.act))
  Ct <- matrix(0, nrow(datos.act)+1,1)
  for (i in 2:nrow(Ct)){
    aux1 <- St[i-1,] + datos.act[i-1,] - a
    aux2 <- t(t(aux1))
    Ct[i,] <- (aux1%*%solve(Sigma.est)%*%aux2)^(1/2)
    if (Ct[i,] > k){
      St[i,] <- aux1*(1 - (k/Ct[i,]))
    } else {
      St[i,] <- c(0,0)
    }
  }
  St <- St[-1,]
  Yt <- matrix(0,nrow(datos.act),1)
  for (i in 1:nrow(datos.act)){
    Yt[i,] <- (t(St[i,])%*%solve(Sigma.est)%*%St[i,])^(1/2)
  }
  return(Yt)
}

```

Código 2: Simulación de datos autocorrelacionados.

```

# Caso: Distribución Normal bivariada. Sea n el número de datos, p el número de
# variables, mu.vector el vector de medias de los datos, sigma.res la matriz
# de varianzas y covarianzas del ruido blanco y phi.amatriz la matriz con los
# coeficientes de autocorrelación:

library(MASS)
nrmvnorm <- function(n, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz){

```

Código 2: Simulación de datos autocorrelacionados (continuación).

```

res.matriz <- mvrnorm(n = n, mu=c(0,0), Sigma=sigma.res)
datos <- matrix(0, n, p)
datos[1,] <- mu.vector + res.matriz[1,]
for (i in 2:n){
  datos[i,] <- mu.vector + phi.matriz%*%(datos[i-1,] - mu.vector)
  + res.matriz[i,]
}
return(datos)
}

# Caso: Distribución t bivariada. Sea n el número de datos, p el número de
# variables, mu.vector el vector de medias de los datos, sigma.res la matriz
# de varianzas y covarianzas del ruido blanco, phi.amtriz la matriz con los
# coeficientes de autocorrelación y gl el parámetro de los grados de libertad
# de la distribución t:

library(mvtnorm)
nrmvt <- function(n, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz, gl){
  sigma.t <- ((gl-2)/gl)*sigma.res
  res.matriz <- rmvt(n=n, sigma=sigma.res, df=gl)
  datos <- matrix(0, n, p)
  datos[1,] <- mu.vector + res.matriz[1,]
  for (i in 2:n){
    datos[i,] <- mu.vector + phi.matriz%*%(datos[i-1,] - mu.vector)
    + res.matriz[i,]
  }
  return(datos)
}

# Caso: Distribución Gamma bivariada. Sea n el número de datos, p el número de
# variables, mu.vector el vector de medias de los datos, sigma.res la matriz
# de varianzas y covarianzas del ruido blanco, phi.amtriz la matriz con los
# coeficientes de autocorrelación y nu el parámetro de forma de la distribución
# Gamma:

library(bayesm)

# Los datos Gamma pseudo-aleatorios se generan de acuerdo a como los definen
# Stoumbus y Sullivan(2002):

wishrand <- function (n,nu,sig) {
  w <- matrix(0,n,2)
  for(i in 1:n) {
    r <- rwishart(nu,sig)$W
    w[i,] <- c(0.5*r[1,1],0.5*r[2,2])
  }
  return(w)
}

nrmvg <- function(n, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz, nu){
  sigma.g <- sqrt((2*sigma.res)/nu)

```

Código 2: Simulación de datos autocorrelacionados (continuación).

```

# Observación: Para que la media del ruido blanco sea cero le restamos
# a los datos generados con la rutina wisrand su media

res.matriz <- wishrand(n, gl, sigma.g)
               - c(0.5*gl*sigma.g[1,1], 0.5*gl*sigma.g[2,2])
datos <- matrix(0, n, p)
datos[1,] <- mu.vector + res.matriz[1,]
for (i in 2:n){
  datos[i,] <- mu.vector + phi.matriz%*(datos[i-1,] - mu.vector)
               + res.matriz[i,]
}
return(datos)
}

```

El ARL se calcula similarmente para cada distribución, así que sólo se presentan las rutinas en el caso de las distribuciones Normal y *t*-Student.

Código 3: Obtención del ARL.

```

# Caso: Distribución Normal.

# Rutina que obtiene las longitudes de corrida. Sea núm.sim la cantidad de
# simulaciones a efectuar, n1 y n2 los totales de datos de referencia y
# monitoreo respectivamente. Sea mu.vector la media del proceso en control,
# sigma.res la matriz de covarianzas del ruido blanco, phi.matriz la matriz con
# coeficientes de autocorrelación, lambda el parámetro de memoria de la gráfica
# MEWMA, H.MEWMA es el LCS de la carta MEWMA, k es un parámetro de referencia
# de la carta MCUSUM, H.MCUSUM es el LCS del esquema MCUSUM y cambio es la
# magnitud de cambio que se añade en la distribución de monitoreo.

RL <- function(núm.sim, n1, n2, alpha, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz,
               lambda, H.MEWMA, k, H.MCUSUM, cambio){
  RL.T <- matrix(0, núm.sim, 1)
  RL.CR <- matrix(0, núm.sim, 1)
  RL.MEWMA <- matrix(0, núm.sim, 1)
  RL.MCUSUM <- matrix(0, núm.sim, 1)
  for (i in 1:núm.sim){
    datos.hist <- nrmvnorm(n1, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz)
    datos.act <- nrmvnorm(n2, p, mu.vector + cambio, sigma.res, phi.matriz)
    LCS <- LCS.Hotelling(n1, p, alpha)
    T2 <- Hotelling.f2(datos.hist,datos.act)
    RL.T[i,] <- min(which(T2>LCS))
    if (RL.T[i,] == Inf) { RL.T[i,] <- n2 }
    Prof.Mah.hist <- PM.hist(datos.hist)
    Prof.Mah.act <- PM.act(datos.hist, datos.act)
    LCI <- LCI.CR(alpha)
    ClasR <- CR(Prof.Mah.hist,Prof.Mah.act)
    RL.CR[i,] <- min(which(ClasR<LCI))
    if (RL.CR[i,] == Inf) { RL.CR[i,] <- n2 }
    MEWMA <- mewma.c(datos.act, lambda, cov(datos.hist))
  }
}

```

Código 3: Obtención del ARL (continuación).

```

    LCS.MEWMA <- H.MEWMA
    RL.MEWMA[i,] <- min(which(MEWMA>LCS.MEWMA))
    if (RL.MEWMA[i,] == Inf) { RL.MEWMA[i,] <- n2 }
    MCUSUM <- mcusum.c(datos.act, k, mu.vector, cov(datos.hist))
    LCS.MCUSUM <- H.MCUSUM
    RL.MCUSUM[i,] <- min(which(MCUSUM>LCS.MCUSUM))
    if (RL.MCUSUM[i,] == Inf) { RL.MCUSUM[i,] <- n2 }
  }
  return(list(RLs.T = RL.T, RLs.CR = RL.CR, RLs.MEWMA = RL.MEWMA,
            RLs.MCUSUM = RL.MCUSUM))
}

# Antes de obtener los ARLs se necesitan los valores del parámetro de no
# centralidad (pnc) para producir los cambios, y la matriz de varianzas
# y covarianzas de Xt (Gamma de 0).

# Rutina para obtener Gamma de 0:

gamma0 <- function(Phi, Sigma){
  I <- diag(nrow(Phi)^2)
  t <- t(Phi)
  aux <- solve(I-kronecker(Phi,t))%*%vec(Sigma)
  return(vecinv(aux))
}

# Rutina para obtener la magnitud de cambio. Sólo puede aplicarse para
# cuando la magnitud es la misma en ambas variables.

magnitud <- function(pnc, mu0, Sigma){
  aux1 <- sum(solve(Sigma))
  delta <- pnc/sqrt(aux1)
  mag <- mu0 + delta
  return(mag)
}

# Obtenga los ARLs. Sea pnc un vector con los valores del parámetro
# no centralidad:

pnc <- c(0, 0.25, 0.50, 2, 3)

for (i in 1:length(pnc)){
  phis <- c(0,0.33,0.63,0.93, -0.50)
  Phi11 <- rep(phis, each=5); Phi22 <- rep(phis, times=5)
  ARLs.T <- matrix(0,25,1)
  ARLs.CR <- matrix(0,25,1)
  ARLs.MEWMA <- matrix(0,25,1)
  ARLs.MCUSUM <- matrix(0,25,1)
  for (j in 1:25){
    phi.matriz <- c(Phi11[j],Phi22[j])*diag(núm.var)
    Gamma0 <- gamma0(phi.matriz, sigma.matriz)
    mag <- magnitud(pnc[i], mu.vector, Gamma0)
  }
}

```

Código 3: Obtención del ARL (continuación).

```

RLs <- RL(núm.sim, núm.obs, 3000, alpha, núm.var, mu.vector, sigma.matriz,
          phi.matriz, lambda, H.MEWMA, k, H.MCUSUM, mag)
ARLs.T[j] <- mean(RLs$RLs.T)
ARLs.CR[j] <- mean(RLs$RLs.CR)
ARLs.MEWMA[j] <- mean(RLs$RLs.MEWMA)
ARLs.MCUSUM[j] <-mean(RLs$RLs.MCUSUM)
}
ARLs <- cbind(Phi11, Phi22, ARLs.T, ARLs.CR, ARLs.MEWMA, ARLs.MCUSUM)
write.csv(ARLs, paste0(i,"ARLs.csv"))
}

# Al final los resultados se almacenan en archivos excel tipo csv.

# Caso: Distribución t.

# Rutina que obtiene las longitudes de corrida. Sea núm.sim la cantidad de
# simulaciones a efectuar, n1 y n2 los totales de datos de referencia y
# monitoreo respectivamente. Sea mu.vector la media del proceso en control,
# sigma.res la matriz de covarianzas del ruido blanco, phi.matriz la matriz con
# coeficientes de autocorrelación, lambda el parámetro de memoria de la gráfica
# MEWMA, H.MEWMA es el LCS de la carta MEWMA, k es un parámetro de referencia
# de la carta MCUSUM, H.MCUSUM es el LCS del esquema MCUSUM, gl el número de
# grados de libertad de la distribución t y cambio es la magnitud de cambio
# que se añade en la distribución de monitoreo.

RL <- function(núm.sim, n1, n2, alpha, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz,
              lambda, H.MEWMA, k, H.MCUSUM, gl, cambio){
  RL.T <- matrix(0, núm.sim, 1)
  RL.CR <- matrix(0, núm.sim, 1)
  RL.MEWMA <- matrix(0, núm.sim, 1)
  RL.MCUSUM <- matrix(0, núm.sim, 1)
  for (i in 1:núm.sim){
    datos.hist <- nrmvt(n1, p, mu.vector, sigma.res, phi.matriz, gl)
    datos.act <- nrmvt(n2, p, mu.vector + cambio, sigma.res, phi.matriz, gl)
    LCS <- LCS.Hotelling(n1, p, alpha)
    T2 <- Hotelling.f2(datos.hist,datos.act)
    RL.T[i,] <- min(which(T2>LCS))
    if (RL.T[i,] == Inf) { RL.T[i,] <- n2 }
    Prof.Mah.hist <- PM.hist(datos.hist)
    Prof.Mah.act <- PM.act(datos.hist, datos.act)
    LCI <- LCI.CR(alpha)
    ClasR <- CR(Prof.Mah.hist,Prof.Mah.act)
    RL.CR[i,] <- min(which(ClasR<LCI))
    if (RL.CR[i,] == Inf) { RL.CR[i,] <- n2 }
    MEWMA <- mewma.c(datos.act, lambda, cov(datos.hist))
    LCS.MEWMA <- H.MEWMA
    RL.MEWMA[i,] <- min(which(MEWMA>LCS.MEWMA))
    if (RL.MEWMA[i,] == Inf) { RL.MEWMA[i,] <- n2 }
    MCUSUM <- mcusum.c(datos.act, k, mu.vector, cov(datos.hist))
    LCS.MCUSUM <- H.MCUSUM
    RL.MCUSUM[i,] <- min(which(MCUSUM>LCS.MCUSUM))
  }
}

```

Código 3: Obtención del ARL (continuación).

```

    if (RL.MCUSUM[i,] == Inf) { RL.MCUSUM[i,] <- n2 }
  }
  return(list(RLs.T = RL.T, RLs.CR = RL.CR, RLs.MEWMA = RL.MEWMA,
            RLs.MCUSUM = RL.MCUSUM))
}

# Obtenga los ARLs. Sea pnc un vector con los valores del parámetro
# no centralidad:

pnc <- c(0, 0.25, 0.50, 2, 3)

for (i in 1:length(pnc)){
  phis <- c(0,0.33,0.63,0.93, -0.50)
  Phi11 <- rep(phis, each=5); Phi22 <- rep(phis, times=5)
  ARLs.T <- matrix(0,25,1)
  ARLs.CR <- matrix(0,25,1)
  ARLs.MEWMA <- matrix(0,25,1)
  ARLs.MCUSUM <- matrix(0,25,1)
  for (j in 1:25){
    phi.matriz <- c(Phi11[j],Phi22[j])*diag(núm.var)
    Gamma0 <- gamma0(phi.matriz, sigma.matriz)
    mag <- magnitud(pnc[i], mu.vector, Gamma0)
    RLs <- RL(núm.sim, núm.obs, 3000, alpha, núm.var, mu.vector, sigma.matriz,
             phi.matriz, lambda, H.MEWMA, k, H.MCUSUM, gl, mag)
    ARLs.T[j] <- mean(RLs$RLs.T)
    ARLs.CR[j] <- mean(RLs$RLs.CR)
    ARLs.MEWMA[j] <- mean(RLs$RLs.MEWMA)
    ARLs.MCUSUM[j] <-mean(RLs$RLs.MCUSUM)
  }
  ARLs <- cbind(Phi11, Phi22, ARLs.T, ARLs.CR, ARLs.MEWMA, ARLs.MCUSUM)
  write.csv(ARLs, paste0(i,"ARLs.csv"))
}

```

El cálculo del ARL en mediciones distribuidas Gamma varía solamente en la rutina RL, en donde se especifica el valor del parámetro de forma ν , el cual se inserta posteriormente en la rutina `nrmvg` que genera los datos.