



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

POSTGRADO DE SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

**Estimación del Índice de Volatilidad México
(VIMEX[®]) Usando Modelos GARCH**

Alberto Ruiz González

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO
2011

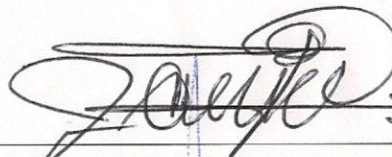
La presente tesis titulada: **Estimación del Índice de Volatilidad México (VIMEX®)** Usando Modelos GARCH, realizada por el alumno: **Alberto Ruiz González**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA ESTADÍSTICA

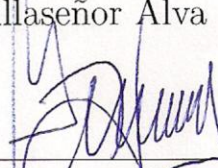
CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO



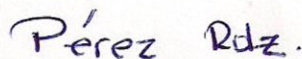
Dr. José A. Villaseñor Alva

DIRECTOR DE TESIS



Dr. Gerardo H. Terrazas González

ASESOR



Dr. Paulino Pérez Rodríguez

Estimación del Índice de Volatilidad México (VIMEX[®]) Usando Modelos GARCH

Alberto Ruiz González

Colegio de Postgraduados, 2011.

Resumen

Debido a la importancia que tiene el concepto de volatilidad en los mercados financieros, este concepto ha sido tomado como un indicador de riesgo y se han generado indicadores y productos derivados referenciados a la volatilidad en los principales mercados del mundo. La principal utilidad de este índice es dar información sobre los niveles de volatilidad del mercado. El Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) no se ha quedado rezagado en este sentido, por lo que se publica el Índice de Volatilidad México (VIMEX[®]). En este trabajo de tesis, se ajusta un modelo GARCH(1,1) a los rendimientos semanales del VIMEX[®] para modelar la varianza y para modelar la media se incluye un proceso AR(2), el cual resulta ser cero en el modelo final. El modelo ajustado produce evidencias favorables en la descripción del indicador; sin embargo, los resultados se podrían mejorar utilizando un modelo asimétrico o una distribución de colas más pesadas.

Palabras clave: GARCH, índices de volatilidad, MexDer, VIMEX[®], volatilidad.

Estimating The Mexico Volatility Rate (VIMEX[®]) Using GARCH Models

Alberto Ruiz González

Colegio de Postgraduados, 2011

Abstract

Due to the importance the volatility concept has in financial markets, at present day it has been taken as a unique risk indicator providing indicators and derived products in reference to it in the main world markets. The main utility of this index is to provide information about the volatility levels in the market. The Mexican Derivates Exchange (MexDer) has taken actions in this matter and publishes the Mexico volatility rate (VIMEX[®]). In this thesis, a GARCH(1,1) model is fitted to weekly gains of VIMEX[®] to model the variance; to model the average value, it is included an AR(2) process, which results to be zero in the final output. The fitted model provides favorable evidence for the indicator description, however, the results could be improved by using an asymmetric model or a heavier tailed distribution.

Key words: GARCH, volatility rate, MexDer, VIMEX[®], volatility.

AGRADECIMIENTOS

A Dios y mis padres por darme la vida y enseñarme que después de caer debo levantarme pase lo que pase.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante la realización de mis estudios.

Al Colegio de Postgraduados, por haberme brindado la oportunidad de seguir mi formación académica en sus aulas.

A los integrantes de mi Consejo Particular:

Al Dr. José A. Villaseñor Alva mi más sincero agradecimiento, por su paciencia y apoyo en la realización del presente trabajo de tesis.

Al Dr. Gerardo H. Terrazas González por su amistad, orientación y apoyo en el presente trabajo.

Al Dr. Paulino Pérez Rodríguez por sus consejos tan atinados y por dedicar parte de su tiempo en la revisión de este trabajo de tesis.

Al Dr. Gustavo Ramírez Valverde por haberme apoyado en la primera etapa de mi ingreso al Colegio de Postgraduados.

A Rebeca y Angela por ayudarme a afinar pequeños detalles.

A mis profesores, compañeros de clase y todas aquellas personas de quienes por las premuras olvido sus nombres, pero que de alguna manera fueron coparticipes de esta tarea.

DEDICATORIA

A mis padres **Luz María y Joaquín**

Mi hermano **Luis Gerardo**

Familia Castillo Ruiz

Y a ti Alma

Aunque ya no estas conmigo, por muchos años me apoyaste, aún cuando las decisiones que tomé no fueron las mejores. Siempre serás de las personas más importantes en mi vida. Gracias! **EOO.**

Índice

1. Introducción	1
1.1. Ecuación Estocástica y movimiento browniano	2
1.2. Volatilidad estocástica	3
1.3. Objetivos	4
2. Revisión de Literatura	5
2.1. Mercados Financieros	5
2.1.1. Derivados financieros	6
2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)	15
2.2.1. Objetivo	16
2.2.2. Instrumentos listados en MexDer	16
2.2.3. Cálculo de precio o prima de liquidación diaria para opciones	18
2.3. Asigna, Compensación y Liquidación	20
2.4. Volatilidad	22
2.4.1. Propiedades de la volatilidad	22
2.4.2. Tipos de volatilidad	23
2.5. Indices de Volatilidad	24

2.5.1. Índice de Volatilidad México (VIMEX)	25
2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)	26
2.6.1. Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresivo de Primer Orden (ARCH(1))	26
2.6.2. Modelo ARCH(p)	28
2.6.3. Modelo GARCH(p,q)	30
2.6.4. Otras distribuciones	33
2.6.5. Modelos con media μ_t como función del tiempo	34
2.6.6. Modelos de Regresión con Errores GARCH	35
2.6.7. Identificación del modelo	36
2.6.8. Estimación	42
2.6.9. Generalizaciones de Modelos GARCH	46
3. Análisis de la volatilidad del Índice de Volatilidad México	50
3.1. Análisis exploratorio	50
3.1.1. Transformación del Índice en Rendimientos	52
3.1.2. Descripción de los rendimientos semanales	53
3.1.3. Autocorrelación de la media y varianza	55
3.1.4. Comentarios finales	57
3.2. Ajuste de Modelos GARCH	58
3.2.1. Selección del modelo para la varianza	59
3.2.2. Selección del modelo para la media	60
3.3. Modelo final	63

Índice

4. Conclusiones y Recomendaciones	65
4.1. Conclusiones	65
4.2. Recomendaciones	66
Referencias	66
Anexos	71
Anexo A: Cálculo del VIMEX®	71

Índice de tablas

2.1. Contratos de productos derivados operados en MexDer.	17
3.1. Coeficientes autorregresivos eliminados de la ecuación de la media.	56
3.2. Valores de BIC y AIC para los modelos GARCH propuestos.	59
3.3. Estimación de parámetros del modelo AR(2)-GARCH(1,1), (modelo 1).	59
3.4. Estimación de parámetros del modelo AR(2)-GARCH(2,1), (modelo2).	60
3.5. Medidas descriptivas del modelo AR(2)-GARCH(1,1).	61
3.6. Medidas descriptivas del modelo GARCH(1,1).	62

Índice de figuras

2.1. Beneficios y pérdidas de contratos futuros de compra.	9
2.2. Beneficios y pérdidas de contratos futuros de venta.	9
2.3. Posición de una opción según el precio del subyacente.El panel (a) muestra una opción call y el panel (b) muestra una opción put.	12
2.4. Beneficios y pérdidas en una Opción con derecho de compra.Panel (a) para el comprador. Panel (b) par el vendedor.	13
2.5. Beneficios y pérdidas en una Opción con derecho de venta.Panel (a) para el comprador. Panel (b) para el vendedor.	14
2.6. Gráfica del IPC [®] en el período del 19 de abril de 1990 al 10 de febrero de 2003.	37
2.7. Gráfica de un proceso ARCH(2).	39
3.1. Gráfica del VIMEX [®] en el período del 26 de marzo de 2004 al 30 de junio de 2010.	51
3.2. Histograma del VIMEX [®]	51
3.3. Gráfica de los rendimientos semanales del VIMEX [®]	53
3.4. Histograma de los rendimientos semanales del VIMEX [®] . La línea continua representa la densidad estimada.	54
3.5. Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los rendimientos semanales del VIMEX [®]	55

Índice de figuras

3.6. Gráfica de los residuales del modelo ajustado autorregresivo de segundo orden, $AR(2)$	56
3.7. Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo autorregresivo de segundo orden, $AR(2)$	57
3.8. Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo $AR(2)$ ajustado elevados al cuadrado.	58
3.9. Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo $AR(2)$ -GARCH(1,1).	61
3.10. Histograma de los residuales del modelo $AR(2)$ -GARCH(1,1).	62
3.11. Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo GARCH(1,2).	63
3.12. Rendimientos observados vs rendimientos ajustados del modelo GARCH(1,1). La línea azul representa las observaciones y la roja los ajustados.	64

Capítulo 1

Introducción

La evolución y comportamiento de los mercados financieros ha despertado mucho interés en los inversionistas debido a que constituyen un medio de financiamiento de la actividad productiva a partir del ahorro. Además, ayudan a que se alcance un nivel de coordinación adecuado entre los diferentes sectores de la economía debido a la información que proporcionan. Para que los mercados financieros cumplan su rol satisfactoriamente es necesario que se pueda conocer y hasta anticipar esta información. Al respecto, los cambios en los precios son aleatorios y no son predecibles en la medida en que incorporan las expectativas e información de todos los participantes del mercado. A estos cambios aleatorios en el rendimiento del activo se le conoce como volatilidad, [Bahí \(2007\)](#). Así, las Finanzas tienen por eje central asumir ciertos riesgos para obtener beneficios, sin embargo, no todos los riesgos generan los mismos beneficios.

Es así como se busca minimizar los riesgos de las pérdidas previstas al tiempo que se desea maximizar los rendimientos esperados. Ideas que adquirieron un nuevo significado desde que [Markowitz \(1952\)](#), [Tobin \(1958\)](#) y posteriormente [Sharpe \(1964\)](#), asociaron el riesgo a la varianza del valor de una cartera, basándose en la búsqueda de la evasión del riesgo, teoría a la cual denominaron valoración de los precios de los activos de capital (CAPM), ([Tamayo-Medina y Rodríguez-Pinzón, 2010](#)).

Sin embargo, el nacimiento de la matemática financiera tuvo su origen poco más de medio siglo antes, en 1900, cuando Louis Bachelier presentó su tesis doctoral titulada *Theorie de la speculation* (Teoría de la especulación), en la cual, propone al movimiento browniano como modelo asociado a los precios de las acciones, esto es, usa el proceso estocástico para explicar las fluctuaciones de los precios. Otra de las aportaciones más importantes de su trabajo es hacer factible el uso de un modelo analítico que permite estimar la probabilidad de ejercer una acción y valorar su prima. Esto es, genera los fundamentos sobre los que posteriormente se construyeron los modelos más populares de valuación de opciones: el modelo Black & Scholes y el modelo binomial.

1.1. Ecuación Estocástica y movimiento browniano

Sin embargo, su trabajo no tuvo tanto impacto y solo lo hizo acreedor al reconocimiento de honorable, lejos de la mejor calificación para una tesis doctoral de la época. Esto debido a diferentes factores, entre los más importantes, destacan la poca importancia que daban los matemáticos al campo de las finanzas, poca influencia de la actividad financiera en la economía, pero sobre todo, a la situación financiera de la época, más bien estable comparada con el período posterior a la obsolescencia del acuerdo de Breton Woods donde todos los activos financieros se vieron envueltos en un incremento de la volatilidad, lo cual repercutió en los mercados financieros del mundo.

1.1. Ecuación Estocástica y movimiento browniano

Para modelar el rendimiento de un activo en un intervalo de tiempo dt , se plantea descomponerlo en dos componentes básicos:

1. Una parte para modelar el crecimiento medio del activo, que es considerado determinístico y predecible, μdt .
2. Un componente aleatorio que es influenciado por respuestas externas y es modelado con una distribución normal de media cero, σdW_1 .

Así, la representación matemática para generar el precio de activos financieros queda como:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_1 \quad (1.1)$$

Respecto a la ecuación (1.1) se deben tener ciertas consideraciones. Primero, si $dW_1 = 0$, lo cual implica que no hay volatilidad, entonces se tiene solo una ecuación diferencial, cuya solución es $S_T = S_t e^{\mu(T-t)}$ asumiendo que la media es constante. Por lo tanto, el precio es determinístico y es posible predecirlo con certeza.

Por otro lado, si dW_1 sigue un proceso Wiener¹, contempla la aleatoriedad del precio del activo como propia y la solución a la ecuación (1.1) es única y está dada por:

¹También conocido como movimiento browniano estándar. Cumple con las condiciones:

- $W_0 = 0$, es decir, parte del origen.
- Tiene incrementos independientes, esto es, si $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, entonces $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes.
- $W_t - W_s$ es una variable aleatoria normal con media cero y varianza $t - s$.

1.2. Volatilidad estocástica

$$S_T = S_0 \exp [(\mu - \sigma^2/2) t + \sigma dW_1] \quad (1.2)$$

Con la condición inicial S_0 (Margalef-Roig y Miret-Artés, 2000). La ecuación (1.2) es conocida como movimiento browniano geométrico y fue desarrollada por Ito (1944) junto con el cálculo estocástico.

Black y Scholes (1973) asumen que el precio de un activo subyacente sigue una ecuación diferencial estocástica que cumple con las propiedades del Lema de Ito², además que el precio de la acción sigue un movimiento browniano geométrico, por lo que los cambios en el logaritmo de los precios siguen una distribución normal³. De esta manera, es como desarrollan la muy conocida fórmula de valuación de opciones Black & Scholes.

1.2. Volatilidad estocástica

También debe considerarse que en la ecuación (1.1), el término referente a la volatilidad es σ ; (es decir, la volatilidad) es constante en todo momento. Sin embargo, no siempre sucede esto. Permitir cambios en el componente σ respecto al tiempo generó intentos por hacer que el movimiento browniano geométrico siguiera un proceso propio para la volatilidad.

Después de varios intentos, Heston (1993) propone modelar el precio de un activo financiero a través de dos ecuaciones: una para la media, como la dada en (1.1) y otra para la volatilidad, dada por:

$$d\sigma = (\xi - \lambda\sigma) dt + \gamma dW_2 \quad (1.3)$$

donde dW_2 es proceso Wiener. Además, el éxito de Heston estuvo en que permite correlación entre los dos términos aleatorios: $Cov(dW_1, dW_2) = \rho dt$. Con esto, se obtienen fórmulas cerradas para la valuación de opciones.

Algunas propiedades del modelo dado por las ecuaciones (1.1) y (1.3) son: primero, exceso de curtosis generado por la volatilidad de la varianza, γ , y si la varianza es muy volátil, la probabilidad de observar grandes shocks en rendimientos aumenta, lo que incrementa la anchura en las colas de la distribución. El parámetro λ es la velocidad con la que el proceso revierte a la varianza de largo plazo (ξ/λ), y captura la persistencia en varianza.

²Uno de los principales resultados de su teoría sobre cálculo estocástico.

³En general, los mercados han asumido esta hipótesis en la valoración de opciones sin producirse sesgos significativos por no utilizar las auténticas distribuciones de los activos subyacentes. Lamothé (2003)

1.3. Objetivos

Un valor de λ distinto de cero sugiere persistencia en varianza, mientras que si λ es cero, entonces la varianza condicional seguirá una caminata aleatoria. Segundo, la asimetría que generalmente se observa en el proceso de rendimientos se puede capturar mediante una correlación negativa entre shocks en la varianza y el proceso de rendimientos. Es decir, $\rho < 0$, ya que en este caso la volatilidad aumenta cuando los precios disminuyen, lo que hace más probable que se produzcan grandes rendimientos negativos, [González \(2008\)](#).

La estimación de el modelo de Heston, dado por (1.1) y (1.3), tiene varios problemas, entre ellos la poca cantidad de técnicas de estimación con datos discretos, aunada a que las pocas que existen no son soluciones cerradas. Las principales técnicas hacen uso del ajuste de un modelo auxiliar en tiempo discreto, por ejemplo de la familia GARCH, tal como lo hace [González \(2008\)](#) debido principalmente a que son capaces de reproducir las principales características de la volatilidad.

Sin embargo, esta no es la única función de los modelos de la familia GARCH. Estos se han utilizado para modelar la volatilidad de los principales índices del mundo observándose un desempeño semejante a los modelos de tiempo continuo. Es por ello que en este trabajo se hace uso de esta metodología para estimar un modelo que explique el comportamiento que ha tenido el Índice de Volatilidad México, VIMEX[®]: el índice que mide la volatilidad del Mercado Mexicano de Derivados, MexDer. Es de interés modelar este indicador porque es importante saber como fluctúa la volatilidad de MexDer, cuál es la incertidumbre que se tiene en el mercado y así determinar opciones de inversiones óptimas. Así mismo, al igual que en otros mercados, pronto podría comenzar a cotizarse algún producto derivado referenciado a este índice; lo cual, haría obligado el ajuste de algún modelo para predecir la volatilidad del VIMEX[®].

1.3. Objetivos

- Ajustar modelos de heterocedasticidad condicional que describan la serie del Índice de Volatilidad México de la Bolsa Mexicana de Derivados con datos del 26 de marzo del 2004 hasta el 30 de junio del 2010.
- Realizar una comparación del desempeño del modelo ajustado respecto a otros modelos ajustados a la serie o en su defecto respecto a otros índices.

El trabajo esta dividido como sigue: en el capítulo dos, se hace una revisión de literatura sobre los mercados financieros enfocándose al Mercado Mexicano de Derivados y a describir los instrumentos derivados. Además, se describen las bases de los modelos GARCH junto con algunas generalizaciones. El capítulo Tres, contiene los resultados de la estimación del modelo GARCH al VIMEX[®]. Finalmente, el capítulo cuatro, contiene las conclusiones del modelo ajustado y recomendaciones.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

2.1. Mercados Financieros

Un mercado financiero es un mecanismo que permite a los agentes económicos el intercambio de activos financieros. En general, cualquier mercado de materias primas podría ser considerado como un mercado financiero si el propósito del comprador no es el consumo inmediato del producto, sino el retraso del consumo en el tiempo.

Los mercados financieros se componen de tres mercados fundamentales:

- Mercados de deuda, (que a su vez incluyen los mercados interbancarios, los de divisas, los monetarios y los de renta fija).
- Mercados de acciones
- Mercados de derivados

Los mercados financieros están afectados por las fuerzas de oferta y demanda. En el sistema financiero, facilitan:

- El comercio internacional (en los mercados de divisas)
- El aumento del capital (en los mercados de acciones)
- La transferencia de riesgo (en los mercados de derivados)

Además de la clasificación por activos, existen otras clasificaciones de acuerdo a estructura y fase de negociación de los activos financieros.

2.1. Mercados Financieros

De entre estos mercados, es de interés el mercado de derivados. Los valores que se negocian en los mercados de derivados se *derivan* (el precio está en función), de materias primas, de valores de renta fija, de renta variable o de índices compuestos por algunos de esos valores o materias primas. Estos mercados han tenido gran desarrollo en los últimos años; para ver esto, el producto interno bruto anual de Estados Unidos es apenas de \$7 billones. Los mercados de derivados tienen aparentemente un valor mayor que el total de las acciones y los bonos en conjunto, el cual es cercano a los \$35 billones, [Jorion \(2008\)](#). Debe notarse que se habla en términos de valores de mercado, no en términos nominales. Hablando en estos términos, si todos los contratos fuesen cancelados, el Banco de Pagos Internacionales estima que el valor de reposición para todos los contratos de mercados no organizados o contratos sobre mostrador *over the counter* sería de \$1.7 billones, [Jorion \(2008\)](#).

2.1.1. Derivados financieros

Según [Jorion \(2008\)](#) un derivado de manera general es un contrato privado, el cual deriva la mayor parte de su valor del precio de algún activo, tasa de referencia o índice subyacente, tales como una acción, una divisa o un producto físico.

Otra definición de un derivado financiero o instrumento derivado es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo. El activo del que depende toma el nombre de activo subyacente, por ejemplo el valor de un futuro sobre el oro se basa en el precio del oro. Los subyacentes utilizados pueden ser muy diferentes: acciones, índices bursátiles, valores de renta fija, tasas de interés o también materias primas.

Esto es, un derivado es un contrato en el que se pacta, al momento de la elaboración, el precio en un futuro de algún activo. El gran auge obtenido por estos productos financieros se debe, principalmente, a la distribución que hacen del riesgo: separa el riesgo de mercado (dado por el cambio en los precios del activo) del riesgo de contraparte (el generado por las partes, si uno gana, el otro pierde y puede no cumplir con sus compromisos en la fecha de liquidación).

Ventajas de los derivados

Entre las principales ventajas de los derivados, se encuentran:

- Sirven como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precio de los subyacentes, por lo que se aplican preferentemente a portafolios accionarios, pagos y cobranzas en moneda extranjera y planeación de flujos de efectivo.

2.1. Mercados Financieros

- Contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros; generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos.

Clasificación de los Derivados

En esta ocasión solo se habla de conceptos básicos de los instrumentos derivados. Para ver como se efectúan las valuaciones de cada tipo de derivado en [Venegas-Martínez \(2008\)](#) se encuentra una discusión muy completa. Existen diferentes clasificaciones para los derivados, a saber:

- Dependiendo del tipo de contrato
- Dependiendo de la complejidad del contrato
- Dependiendo del lugar de contratación y negociación
- Dependiendo del subyacente
- Dependiendo de la finalidad

De estas clasificaciones, se revisará la que se basa en los tipos de contratos.

Futuros

Los contratos futuros son los derivados mas antiguos. En el siglo *XIX*, en Chicago, se pactaron los primeros contratos futuros entre agricultores y comerciantes de granos. Para 1848, se estableció el Chicago Board of Trade (CBOT), donde se estandarizaron la calidad y cantidad de los granos y en 1865 se negociaron los primeros contratos futuros estandarizados.

En cuanto a los futuros financieros, este mercado se abrió a inicios de los años setenta con la creación del Chicago Mercantile Exchange (CME), donde se inició operando futuros sobre divisas. Hoy en día, existen futuros sobre tipos de interés, divisas e índices bursátiles. Así, los contratos de futuros son pactados en mercados organizados.

Un contrato de futuros es un acuerdo que obliga a una de las partes a comprar y a la otra a vender un número de bienes o valores (activo) en una fecha futura, pero con un precio establecido al momento de hacer el contrato.

Quien adquiere contratos futuros adopta una posición larga, la cual le da el derecho de recibir el activo subyacente al que hace referencia el contrato en la fecha de vencimiento pactada. Por el contrario, quien vende contratos futuros, adquiere una posición corta,

2.1. Mercados Financieros

con lo que, al llegar a la fecha de vencimiento, deberá entregar el activo de referencia y recibir la cantidad acordada cuando se pacto el contrato.

Debe mencionarse que los contratos futuros realizan una liquidación diaria de pérdidas y ganancias dadas por las variaciones del precio del futuro; obteniéndose los derechos y obligaciones correspondientes, tales como mantener y ajustar las garantías mientras no se cierre la posición o recibir las ganancias correspondientes. Así mismo, la gran mayoría de contratos no se liquidan, sino que las posiciones son cerradas antes del vencimiento.

Los futuros tienen diferentes funciones, entre las más importantes destacan:

- Posicionarse a la baja en acciones
- Cobertura de acciones
- Cobertura anticipada
- Tomar posición en dos acciones
- Cambiar de una acción a otra

Riesgos en futuros

El riesgo que se adopta en un contrato de futuros es ilimitado. Si se adopta una posición larga y el precio de la fecha de vencimiento es menor que el precio pactado, entonces se tiene una perdida de tamaño igual a la diferencia de precios. Por el contrario, si el precio de fecha de vencimiento es mayor que el precio pactado, se genera una ganacia, igual a la diferencia de precios, ver la figura 2.1.

Por otro lado, si se adopta una posición corta y el precio de vencimiento es mayor que el precio pactado, se generan perdidas, igual de tamaño la diferencia de precios. Así mismo, si el precio de vencimiento es menor que el precio pactado, se genera una ganacia de la misma magnitud que en la posición larga. Esto es, la ganancia también es ilimitada, ver figura 2.2.

Forwards

Son derivados semejantes a los futuros, pero son exclusivos de los mercados sobre mostrador (*over the counter*, OTC). Otra característica es que son contratos *a la medida*, esto es, se ajustan a las necesidades específicas de las partes: tipo de subyacente, tamaño del contrato, fecha de vencimiento y lugar y condiciones de entrega.

Opciones

2.1. Mercados Financieros

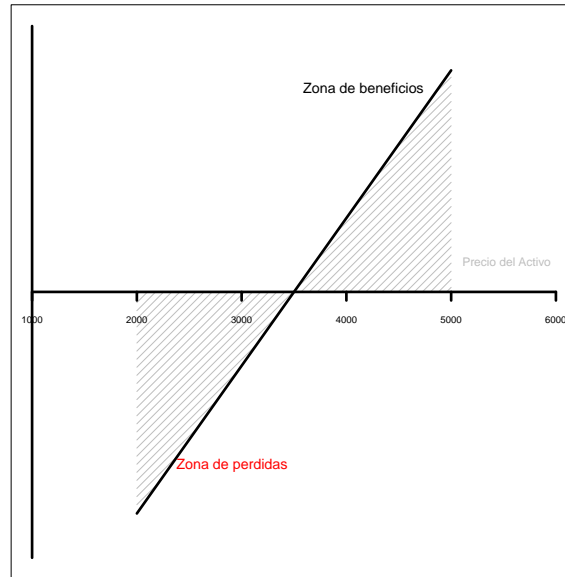


Figura 2.1: Beneficios y pérdidas de contratos futuros de compra.

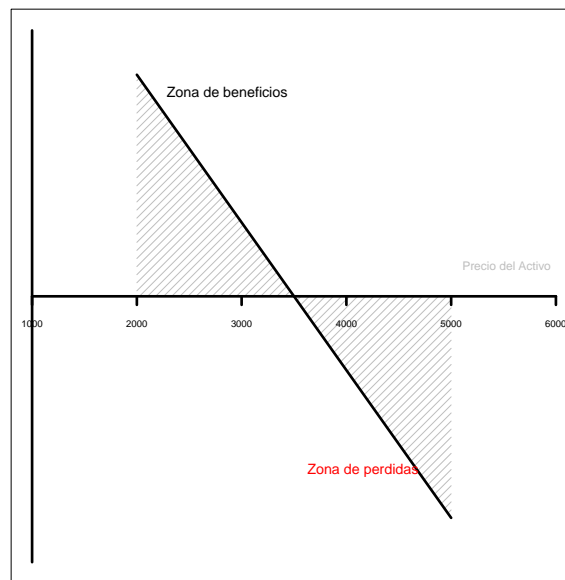


Figura 2.2: Beneficios y pérdidas de contratos futuros de venta.

Las opciones aparecieron a inicios del siglo XX, pero no tuvieron el éxito esperado, hasta 1973, cuando The Chicago Board Options Exchange (CBOE) comenzó a funcionar. Posteriormente, en 1975, The American Stock Exchange (AMEX) y The Philadelphia Stock Exchange (PHLX) iniciaron operaciones sobre opciones. Un año más tarde, se incorporó al mercado el New York Stock Exchange.

2.1. Mercados Financieros

Al igual que los futuros, hay contratos de opciones sobre tasas de interés, divisas e indicadores bursátiles, agregándose contratos sobre acciones y sobre los futuros mismos. Así mismo, al igual que los futuros, son contratos pactados en mercados organizados.

Una opción es un contrato entre dos partes a través del cual una de ellas adquiere el derecho, pero no la obligación de comprar o vender una cantidad determinada de algún activo en un futuro a un precio fijado al momento del contrato.

Las principales características que definen a las opciones son:

- Tipo de opción
- Activo subyacente de referencia
- Cantidad de activo subyacente
- fecha de vencimiento
- Precio de ejercicio¹

Clasificación de las opciones

Existen fundamentalmente dos tipos de opciones, a saber:

- Contrato de opción de compra (*Call*)
- Contrato de opción de venta (*Put*)

Así, regresando a la definición, se tiene que: en las posiciones una de las partes (la parte compradora de la opción) tiene el derecho, pero no la obligación de comprar (*call*) o vender (*put*), mientras que el vendedor de la opción solamente va a tener la obligación de vender (*call*) o de comprar (*put*). Dicha diferencia de derechos y obligaciones genera la existencia de la prima, que es el importe que abonará el comprador de la opción al vendedor de la misma.

Así, se tienen cuatro alternativas cuando se operan opciones:

- Compra de opción de compra (*long call*)
- Venta de opción de compra (*short call*)
- Compra de opción de venta (*long put*)

¹Precio al que el comprador de la opción tiene el derecho de compra (Call) o de venta (Put).

2.1. Mercados Financieros

- Venta de opción de venta (*short put*)

Otra clasificación, es dada por la fecha de ejercicio:

- **Opciones americanas.** Se pueden ejercer en cualquier momento del contrato (ejercicio anticipado) o hasta la fecha de vencimiento (ejercicio a vencimiento).
- **Opciones europeas.** Solo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento (ejercicio a vencimiento).

Una clasificación más está en función de la situación (*in, at o out the money*) y del tipo de opción (*call o put*). Esto es, se observa la diferencia entre el precio de ejercicio y la cotización del activo. La figura (2.3) muestra la situación de las opciones *call* y un *put*.

- Una opción está *in the money* si ejerciéndola se tiene beneficio. Considerando opciones *call* y *put*:

La opción es *call* y el precio de ejercicio es inferior a la cotización del subyacente

La opción es *put* y el precio de ejercicio es superior a la cotización del subyacente

- Una opción está *at the money* si el precio de ejercicio es igual o casi igual al del subyacente, sin importar si el contrato es *call o put*, esto es, cuando se encuentre entre la frontera de beneficios o pérdidas.
- Una opción está *out of the money* si ejerciéndola no se obtienen beneficios. Considerando opciones *call* y *put*:

La opción es *call* y el precio de ejercicio es superior a la cotización del subyacente

La opción es *put* y el precio de ejercicio es inferior a la cotización del subyacente

Prima de una opción

Ya se ha mencionado que la prima de una opción es el importe que paga un comprador al vendedor de la opción. Esta refleja el valor de la opción y se determina en base a:

- **Cotización del activo subyacente.** La opción se ve influenciada en gran medida por el precio del subyacente; si sube el precio del activo, sube el de la opción *Call* y baja el de la opción *Put*. Lo contrario también se cumple en cada tipo de opción.

2.1. Mercados Financieros

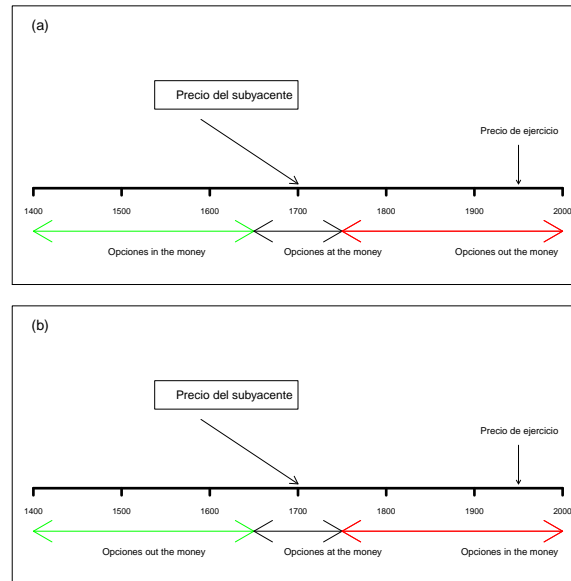


Figura 2.3: Posición de una opción según el precio del subyacente. El panel (a) muestra una opción call y el panel (b) muestra una opción put.

- **Precio de ejercicio de la opción.** Si las opciones son *Call*, la prima será menor si el precio de ejercicio es alto (más barato será el derecho de compra). Por el contrario, si la opción es *Put*, la prima será mayor si el precio de ejercicio es mayor (más caro será el derecho de venta).
- **Volatilidad.** La volatilidad mide la variabilidad del precio de las opciones. Mientras mayor sea la volatilidad, más caras serán, por el contrario, si las opciones tienen poca volatilidad, menor será el precio de ellas.
- **Tipo de interés de mercado monetario.** El efecto que tiene sobre la prima es pequeño respecto a los otros factores.
- **Tiempo restante hasta el vencimiento.** La compra de opciones se ve perjudicada por el paso del tiempo, mientras que la venta se ve beneficiada.
- **Dividendos (solo se aplica en opciones sobre acciones).** Tiene la misma influencia que la cotización de activos.

Riesgos de las Opciones

El riesgo adquirido en una opción depende si se trata de opciones de compra o de venta; así:

Derecho de compra: opción *call*

2.1. Mercados Financieros

Al adquirir una opción con derecho de compra, el interés es que el precio del subyacente suba, dado que esto generará ganancias; estas serán ilimitadas. Sin embargo, si el precio baja, se tendrán pérdidas, pero limitadas por la prima de la opción. Por otro lado, para el vendedor de un derecho de compra, el interés es que el subyacente baje. así tendrá ganancias dadas por la prima de la opción. Si, por el contrario, el precio del subyacente sube, tendrá pérdidas ilimitadas. Debe notarse que existe equilibrio entre ambas partes, esto es, una parte gana tanto como la otra pierde. En la figura (2.4) se ilustra la situación de compradores y vendedores de opciones *call*.

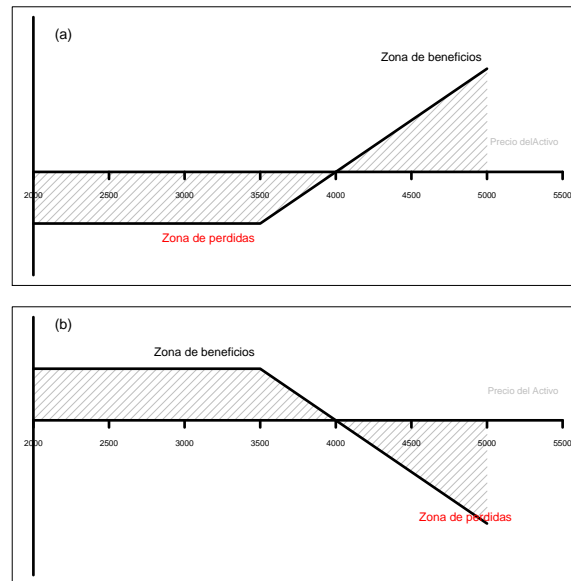


Figura 2.4: Beneficios y pérdidas en una Opción con derecho de compra. Panel (a) para el comprador. Panel (b) par el vendedor.

Derecho de venta: opción *put*

Cuando se adquiere una opción con derecho de venta, se tiene interés en que baje el precio del subyacente, así si tienen ganancias ilimitadas. Por el contrario, si el precio sube, se adquieren pérdidas menores o iguales a la prima de la opción. Por otro lado, si se vende una opción *put*, se tiene interés en que suba el precio del subyacente para tener ganancias menores o iguales a la prima de la opción. Si el precio baja, se tienen pérdidas ilimitadas. En la figura (2.5) se ilustran estas posiciones.

Swaps

Los swaps son contratos mediante los cuales dos partes acuerdan intercambiar flujos de efectivo basados en un subyacente en intervalos de tiempo regulares. Los subyacentes pueden ser tipos de cambio, tasas de interés o índices accionarios o bursátiles, entre otros.

2.1. Mercados Financieros

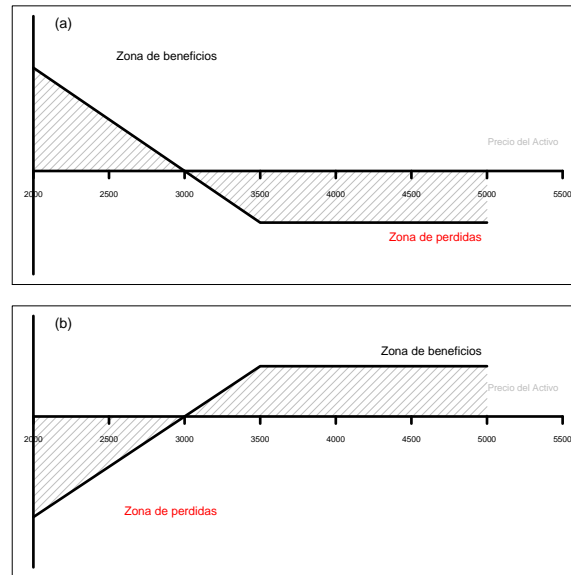


Figura 2.5: Beneficios y pérdidas en una Opción con derecho de venta. Panel (a) para el comprador. Panel (b) para el vendedor.

Los primeros contratos que se asemejaron a los swaps aparecieron en el Reino Unido a principios de los años setenta debido a la alta volatilidad de los tipos de cambio. El primer swap sobre divisas se creó y apareció en 1979. Sin embargo, el primer swap real, apareció en 1981 e involucró al Banco Mundial y a IBM como contrapartes. Estos contratos son exclusivos de mercados *over the counter*, esto es, son contratos *a la medida*.

Por ser contratos a la medida, los swaps requieren gran cantidad de documentación para especificar completamente los términos y las disposiciones del contrato y las cláusulas especiales. Aunque todos tienen las mismas características básicas: dos agentes, subyacente, fecha efectiva, fecha de terminación, pago fijo y pago flotante, entre otros.

Clasificación de Swaps

Los swaps se clasifican de acuerdo al subyacente:

- Swaps sobre tasas de interés. Este tipo de swaps son los más comunes. En ellos una de las partes acuerda pagar una tasa de interés fija, mientras la otra parte acuerda pagar una tasa de interés flotante sobre el mismo subyacente.
- Swaps de materias primas. Es sabido que los mercados de materias primas son de alta volatilidad. Es por ello, que estos swaps están diseñados para eliminar el riesgo de precio y, así, bajar los costos de financiamiento.
- Swaps de índices bursátiles. Estos contratos, permiten intercambiar el rendimiento del mercado de dinero por el rendimiento del mercado bursátil.

2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

- Swaps de tipos de cambio. Esta clase de swaps es semejante a los swaps sobre tasas de interés, solo que sobre dos subyacentes, en este caso, momendas distintas. Además, en esta clase, los subyacentes, se intercambian al inicio y al final del contrato.
- Swaps crediticios. Sirven para administrar el riesgo a través de medir y determinar el precio de cada uno de los subyacentes. Si hay alto riesgo, se puede transferir y así acceder al crédito a un menor costo.

Warrants

También conocidos como títulos opcionales. Son semejantes a las opciones, es decir, son contratos que otorgan el derecho, más no la obligación, de comprar o vender una cantidad determinada de algún activo a un precio determinado en una fecha futura también determinada. Los activos subyacentes más comunes para los warrants son acciones, índices bursátiles, divisas y tipos de interés.

Las principales diferencias entre una opción y un warrant son:

- El plazo de vencimiento. Las opciones tienen un plazo máximo de un año, mientras que los warrants pueden tener un plazo mayor (hasta dos años).
- Liquidez. Los warrants suelen gozar de mayor liquidez, puesto que las entidades emisoras se encargan de que esta exista. En las opciones, la liquidez depende del mercado.

2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

En diversas partes del mundo, los derivados financieros hicieron su aparición en la década de los años setenta; México no fue la excepción. En 1978, la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) cotizó futuros hasta 1982 sobre el tipo de cambio peso/dólar. Posteriormente, de 1983 a 1986 volvió a listar futuros sobre acciones y petrobonos. En 1987, se reinició la emisión de contratos sobre el tipo de cambio peso/dólar. Aunado a esto, el Gobierno Federal emitió diversos instrumentos financieros; por ejemplo petrobonos (1977 – 1991), págares (1986 – 1991) y tesosbonos (1989), entre otros.

Ya para la década de los noventa, se negociaron contratos forward sobre tasas de interés de títulos gubernamentales. En 1994, el Banco de México reguló la operación de contratos forward sobre la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y el índice nacional de precios al consumidor (INPC). En 1992, aparecieron los Títulos Opcionales (warrants) en la BMV sobre acciones e índices accionarios.

2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

Esta experiencia con productos derivados mostró evidencia sobre la existencia de la demanda en México por tales instrumentos financieros y la utilidad de estos mismos para controlar y administrar riesgos. Aunado a ello, fue evidente la necesidad de contar con un mercado organizado donde se efectuaran las operaciones de estos instrumentos.

Es así, que en 1994, la BMV y el Instituto para el Depósito de Valores (S.A. Indeval) pusieron en marcha las gestiones para el cumplimiento de los requisitos jurídicos, operativos, tecnológicos y prudenciales establecidos por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), la Comisión Nacional Bancaria y de Valores y el Banco de México (Autoridades Financieras) para la creación de un mercado de derivados, posteriormente llamado MexDer, y su Cámara de Compensación, Asigna, Compensación y Liquidación.

De esta manera, el Mercado de Derivados de México, MexDer, Mercado Mexicano de Derivados S.A. de C.V. inició operaciones en diciembre de 1998 con contratos futuros sobre subyacentes financieros.

2.2.1. Objetivo

Consolidar la administración de riesgos de las instituciones financieras, empresas e inversionistas ofreciendo una amplia gama de instrumentos derivados.

2.2.2. Instrumentos listados en MexDer

En el MexDer se operan los contratos de futuros y acciones mostrados en la tabla [2.1](#).

Las opciones son de los dos tipos: europeas y americanas:

Opciones europeas: IPC[®] y dólar de Estados Unidos,

Opciones americanas: América móvil, CEMEX CPO, Televisa CPO, GMéxico B, Telmex L, WALMEX V y Naftrac 02.

Contratos de MexDer

Los contratos que ofrece MexDer tienen los siguientes componentes principales:

Subyacentes. Activos de referencia. Listados en la tabla [2.1](#).

Tamaño del contrato. Especifica la cantidad del subyacente que debe ser liquidada

2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

Tabla 2.1: Contratos de productos derivados operados en MexDer.

Derivado	Subyacente	Contrato
Futuro	Divisas	Dólar de Estados Unidos de América (DEUA)
		Euro
	Indices	Indice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC®)
	Deuda	Cetes a 91 días (CE91)
		TIIE a 28 días (TE28)
		Swap de TIIE a 2 y 10 años (SW02 y SW10)
		Swap de TIIE a 2 y 10 años (liquidación en especie)
		Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal a 3, 19 y 20 años (M3, M10 y M20)
		UDI
	Acciones	América Móvil L
Comex CPO		
Femsa UBD		
GCarso A1		
Telmex L		
WALMEX V		
Opción	Divisas	Dólares de Estados Unidos de América
	Indices	Indice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC®)
	Acciones	América Móvil (AX)
		Cemex CPO (CX)
		Televisa CPO (TV)
		GMéxico B (GM)
		Telmex L (TX)
		WALMEX V (WA)
Naftac 02 (NA)		

por contrato. Por ejemplo, el tamaño de un futuro sobre el IPC® es de \$10 multiplicados por el valor del IPC®. Una opción sobre el dólar tiene un tamaño de diez mil dólares.

Período del contrato. Especifica el ciclo del contrato y por cuanto tiempo son válidos. Por ejemplo, una opción sobre acciones tiene ciclos trimestrales y validez por un año. Un futuro sobre la TIIE tiene ciclos mensuales a lo largo de 10 años.

Fecha de liquidación. Es el día hábil en que son exigibles las obligaciones derivadas de un contrato plasmadas en las condiciones de contratación.

Tipo y estilo del contrato. Se refieren a si son de compra (*call*) o de venta (*put*) y si la modalidad es americana o europea (solo aplica en opciones). Por ejemplo, la opción sobre acciones de Grupo México son de compra y venta y de tipo americano.

Precio de ejercicio. Precio de mercado al que se ejerce un contrato. Por ejemplo, el precio del IPC® se expresa en puntos enteros y como múltiplos de 50.

Precio de liquidación diaria. Precio de referencia que MexDer da a conocer a la cámara de compensación para efectos de compensación y liquidación diaria de los contratos de

2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

opciones.

Las demás características están relacionadas con claves de pizarra y vencimiento, unidades de cotización, fluctuación mínima y horario de cotización.

2.2.3. Cálculo de precio o prima de liquidación diaria para opciones

Finalizado el día de negociación, MexDer calculará los precios de liquidación diaria para cada contrato de opción de acuerdo a la siguiente metodología y en el mismo orden.

1. Promedio Ponderado de los hechos de los últimos cinco minutos
2. Posturas al Cierre de Negociación
3. Volatilidad del último hecho registrado durante la sesión de negociación
4. Precio Teórico (Skew de Volatilidad Teórico)
5. Volatilidad del día inmediato anterior

El resultado obtenido de acuerdo a los incisos anteriores será ajustado empleando la metodología de Heston.

En las opciones, los puntos del tres a cinco, usan la volatilidad mencionada para calcular el precio de liquidación teórico a través de aplicar el modelo de valuación binomial para opciones americanas o el método Black 76.

Modelo Black 76

Como se ha mencionado anteriormente, el modelo Black & Scholes asume que todos los factores que intervienen en el valor teórico de un activo son conocidos a excepción de la volatilidad. El modelo para valuación de opciones Black 76 viene dado por:

$$C = e^{-rt} [F\Phi(-d_1) + K\Phi(-d_2)] \quad \text{y} \quad P = e^{-rt} [-F\Phi(-d_1) + K\Phi(-d_2)]$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{F}{K}\right] + \frac{\sigma^2 t}{2}}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

2.2. Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

C:	Valor teórico de una opción <i>call</i>
P:	Valor teórico de una opción <i>put</i>
F:	Precio del subyacente
K:	Precio de ejercicio de la opción
t:	Tiempo a vencimiento, en años
σ :	Volatilidad implícita del subyacente
r:	Tasa de interés al plazo de vencimiento

Además, el sistema que se encarga de la valuación, considera:

$$\text{Si } C < F - K \text{ entonces } C = F - K$$

$$\text{Si } P < F - K \text{ entonces } P = F - K$$

Si el valor teórico es inferior al valor intrínseco de la opción, se considera este último por ser opciones americanas.

Modelo Binomial

El modelo de valuación binomial² es un modelo de tiempo discreto para la valuación de opciones. La principal característica de este modelo es que converge al modelo de Black Scholes.

está dado por:

$$C_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max \{0, u^k d^{n-k} F_t - K\}$$

$$P_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max \{0, K - u^k d^{n-k} F_t\}$$

donde:

$$p = \frac{e^{r(T-t)/nd} - d}{u - d}$$

²Cox, J. C., Ross, S. A. y Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics. 7, 3, pp. 229-263.

2.3. Asigna, Compensación y Liquidación

$$u = e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}$$

- C: Valor teórico de una opción *call*
- P: Valor teórico de una opción *put*
- F: Precio del subyacente
- K: Precio de ejercicio de la opción
- T: Tiempo a vencimiento, en años
- t: Tiempo actual
- σ : Volatilidad implícita del subyacente
- r: Tasa de interés al plazo de vencimiento

Además, el sistema que se encarga de la valuación, considera:

$$\text{Si } C < F - K \text{ entonces } C = F - K$$

$$\text{Si } P < F - K \text{ entonces } P = F - K$$

Si el valor teórico es inferior al valor intrínseco de la opción, se considera este último por ser opciones americanas.

2.3. Asigna, Compensación y Liquidación

Los mercados de derivados organizados cuentan con una Cámara de Compensación, cuya función principal es garantizar el cumplimiento de las obligaciones financieras que se generan por las operaciones de productos derivados. Así, se elimina el riesgo crédito que puede haber por incumplimiento de alguna de las partes. Asigna, Compensación y Liquidación es la Cámara de Compensación y Liquidación de MexDer.

Asigna es un Fideicomiso³ de administración y pago constituido en 1998 en BBVA Ban-

³Figura jurídica que ampara la entrega de determinados bienes por parte de una persona física o moral (el fideicomitente) a una institución que garantice su adecuada administración y conservación (el fiduciario) y cuyos beneficios serán recibidos por la persona que se designe (el fideicomisario) en las condiciones y términos establecidos en el contrato de fideicomiso.

2.3. Asigna, Compensación y Liquidación

comer, con el objeto de compensar y liquidar las operaciones de productos derivados realizadas en MexDer. Sus fideicomitentes son los principales Grupos Financieros del país; Banamex Citigroup, BBVA Bancomer, JP Morgan, Santander-Serfin, Scotiabank Inverlat, así como el Instituto para el Depósito de Valores S.D. Indeval.

Como contraparte (es decir, es comprador del vendedor y vendedor del comprador) de todos los contratos operados en MexDer, Asigna lleva acabo actividades dirigidas a mantener la integridad financiera y operativa de sus Intermediarios, Clientes y de si misma.

Las primeras actividades de control de riesgos están encaminadas a evitar la concentración de posiciones abiertas que lleguen a ser de alto riesgo para el mercado en su conjunto. En este sentido las principales actividades que se desarrollan son las siguientes:

- Monitoreo permanente del comportamiento del mercado
- Monitoreo de las posiciones abiertas y posiciones límite
- Supervisión de los procesos de liquidación diaria y al vencimiento de los contratos
- Vigilancia del cumplimiento de manuales y reglamentos internos
- Observación de los parámetros operativos

Como una medida de prevención de quebrantos de Intermediarios y Clientes, se lleva a cabo una evaluación de riesgo al que se exponen. Para realizar esta actividad, Asigna desarrolla entre otras, las siguientes actividades:

- Monitorea en tiempo real las posiciones de sus Operadores y Clientes, así como la suficiencia de recursos.
- Realiza simulaciones con movimientos extremos de precios para cada cuenta abierta en el mercado.
- Establece alarmas sobre la insuficiencia de recursos con el fin de requerir recursos de manera oportuna.
- Detona una Liquidación Extraordinaria, en caso de que las Aportaciones Iniciales Mínimas sean insuficientes.

Asigna desarrolla una serie de actividades encaminadas a la implementación y desarrollo de metodologías que permiten estimar parámetros de riesgo, con el objeto de mantener la integridad financiera del mercado. Entre otras actividades desarrolladas, sobresalen las siguientes:

2.4. Volatilidad

- Determinar las Aportaciones Iniciales Mínimas (AIM's) aplicables a cada uno de los Contratos de Futuros negociados en MexDer.
- Evaluar y determinar los descuentos (haircuts) que deben aplicar a los valores constituidos como AIM's.
- Monitorear a tiempo real la suficiencia de las AIM's.

2.4. Volatilidad

La volatilidad forma parte fundamental en la valuación de contratos de derivados, como ya se ha visto. Una definición desde el punto de vista económico es dada por [Bahí \(2007\)](#): una medida de la intensidad de los cambios aleatorios o impredecibles en la rentabilidad o en el precio de un valor. Gráficamente se asocia la volatilidad con la amplitud de las fluctuaciones del rendimiento en torno a su valor medio. En términos estadísticos, la volatilidad es la desviación estándar, es decir, una medida de dispersión lineal que mide la frecuencia y magnitud con la que un activo se desvía de su comportamiento habitual (media).

2.4.1. Propiedades de la volatilidad

Existencia de clusters. La volatilidad tiende a aparecer agrupada por períodos. Esto es, si se observa volatilidad baja, se espera que se mantenga por un período de tiempo. De manera semejante, si se tiene volatilidad elevada, esta se mantendrá durante un período. Este comportamiento ha sido reportado en numerosos estudios, como [Baillie *et al.* \(1996\)](#), [Chou \(1988\)](#) y [Schwert \(1989\)](#) según indican [Casas y Cepeda \(2008\)](#).

Reversión a la media. Debido a la existencia de cluster, la volatilidad baja si es alta y sube si es baja regresando a un nivel medio eventualmente.

Discontinuidades de saltos en los precios. En un período específico se produce alta volatilidad.

Asimetría. La volatilidad puede ser afectada de forma diferente según se tengan buenas o malas noticias en el mercado. Una mala noticia tendrá mayores repercusiones que una buena noticia.

Influencia de variables exógenas. Los precios de los activos se ven influenciados por la actividad económica, esto indica que hay variables exógenas que afectan los rendimientos de los activos. Aunado a ello, las mismas series de diversos mercados se ven afectadas por cambios bruscos en alguno de ellos.

2.4. Volatilidad

Exceso curtosis. La distribución de los rendimientos presenta gran aglomeración en la media de la distribución, esto es, los rendimientos presentan distribuciones leptocúrticas⁴.

2.4.2. Tipos de volatilidad

Al hablar de volatilidad, se deben considerar tres tipos: histórica, implícita y futura.

Volatilidad histórica

Lamothé (2003) la define como la volatilidad de un subyacente calculada según series históricas de precios. Refleja el comportamiento del precio de algún subyacente en el pasado, esto es, es la volatilidad realizada. Depende del período de tiempo que se considere; así, no es lo mismo hablar de la volatilidad durante los últimos cinco meses a la de los últimos cinco años. Además, depende también de qué precios se utilicen para calcularla: de cierre, apertura o de algún intervalo de tiempo. Los principales métodos para el cálculo son considerar precios de cierre y con base en los precios máximos y mínimos de diferentes sesiones de negociación. El primer enfoque es el más usado por la simplicidad de cálculos. Sin embargo, sin importar que período de tiempo se use, mantendrá valores parecidos y la misma tendencia.

Volatilidad implícita

Surgió con el modelo de valuación de opciones de Black y Scholes. Se define como: la volatilidad que incorpora el precio de una opción en el mercado, siendo conocidos el resto de factores que intervienen en el cálculo del valor teórico (precio del subyacente, precio de ejercicio, tiempo a vencimiento, dividendos y tasa de interés). Es claro que la volatilidad implícita no es única, ya que depende del precio de ejercicio, el cual cambia de un momento a otro y del modelo de valuación usado (se debe estar seguro que el modelo usado es el que se usa en la mayoría de los mercados).

En los últimos años ha sido mayor el uso de esta volatilidad, sin embargo, al ser calculada a partir de modelos de valuación, requiere que los contratos de opción estén cotizados en mercados organizados o mercados *OTC*. De no ser así, se corre el riesgo de no contar con la información necesaria o que sea restringida al público en general.

⁴Curtosis mayor a tres, mayor a la de una distribución normal.

2.5. Índices de Volatilidad

Volatilidad futura

Es la volatilidad que se presume se presentará en el futuro, la que los inversionistas desean saber. Este tipo de volatilidad no es manejable, ni conocida. Esta volatilidad es la que se intenta pronosticar con modelos econométricos, modelos de series de tiempo clásicas (de Box-Jenkins) y, recientemente, modelos de la familia GARCH y de volatilidad estocástica. Estas dos últimas familias han mostrado un mejor desempeño por considerar a la varianza heterocedástica.

2.5. Índices de Volatilidad

De entre los tipos de volatilidad, como ya se mencionó, en los últimos años, la volatilidad implícita ha tomado gran relevancia y ha sido de gran utilidad. Debido a esto, ha dejado de tomarse solo como un indicador de riesgo: han surgido indicadores y productos derivados referenciados a ella. Debe mencionarse, que desde que se cotizan opciones (1973) han habido intentos por generar indicadores de volatilidad; como ejemplos se pueden mencionar [Gastineau \(1977\)](#), [Cox y Rubinstein \(1985\)](#) y [Brenner y Galai \(1989\)](#). Sin embargo, fue hasta 1993, que el Chicago Board Options Exchange (CBOE) comenzó a calcular y publicar un índice de volatilidad: el Volatility Index (VIX) con las opciones del Standar & Poor's 100 (S&P 100). En septiembre de 2003, El CBOE cambia la metodología de cálculo del VIX: utiliza como referencia el S&P 500 y considera precios de ejercicio *out of the money* en lugar de solo *at the money* y deja de utilizar el modelo Black & Scholes para la valuación con el fin de reflejar nuevas tendencias teóricas y prácticas acerca de la volatilidad y su negociación, [Rubio y Marrero \(2004\)](#)).

El CBOE, además del VIX, ha puesto en el mercado otros índices de volatilidad. El VXN: índice de volatilidad con las opciones del NASDAQ-100, desde febrero de 2001. A partir de septiembre de 2003, el cálculo del VXN se hace con la metodología usada para calcular el VIX. Otro indicador es el VXD: Índice de volatilidad sobre las opciones del Dow Jones⁵.

A partir de 2004, el CBOE lista contratos de futuros sobre el VIX y a partir de 2006, contratos de opciones sobre el mismo índice.

Un año después del lanzamiento del VIX, en 1994, la bolsa de derivados alemana, Deutsche Börse publica su propio índice de volatilidad llamado VDAX (Volatility Deutscher Aktienindex), sobre los contratos de opciones del DAX⁶ (Deutscher Aktienindex). En abril de 2005, Deutsche Börse cambia la metodología para el cálculo del VDAX y al nuevo índice le llama VDAX[@]-NEW. Las diferencias son: el uso de los precios *out of the money*,

⁵Para ver más índices visitar la página <http://www.cboe.com/>.

⁶Índice bursátil de la Bolsa de Fráncfurt, Alemania. También conocido como DAX 30.

2.5. Índices de Volatilidad

como lo hace el VIX, no usa un modelo de valuación de opciones y disminuye el período de referencia de 45 a 30 días naturales.

Otros mercados de derivados no se han quedado atrás en el lanzamiento de esta clase de indicadores, como ejemplo, se tiene el EUREX⁷ con el VSTOXX[®] y el VSMI[®], la Bolsa de Montreal con el MVX y el mercado francés con los indicadores VX1[®] y VX6[®].

La principal utilidad de un índice de volatilidad radica en brindar los niveles de volatilidad que espera el mercado. Con ello se pueden realizar mejores estrategias de cobertura y llevar a cabo un mejor manejo de portafolios.

Aunque la metodología utilizada es diferente para cada índice, la base es la misma y consiste en ponderar la volatilidad implícita de alguna opción u opciones cuyos precios de ejercicio están *at the money* o lo más cercano a esta posición considerando el tipo de opción: *call* o *put*. Además, consideran la fecha de vencimiento. Han habido algunas modificaciones como la hecha al VIX y al VDAX[®]-NEW, donde ya se usan precios *out of the money* debido a que en los mercados difícilmente se llega a dar un precio *at the money*.

2.5.1. Índice de Volatilidad México (VIMEX)

A partir de marzo de 2004, el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) genera el Índice de Volatilidad México (VIMEX[®]) con base en los contratos de opciones sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC[®]) de la Bolsa Mexicana de Valores, basado en la metodología de [Fleming et al. \(1995\)](#), pero fue hasta 2006 cuando se publicó.

Características del VIMEX[®]

- Engloba la Volatilidad del Mercado Accionario Mexicano
- Calcula la Volatilidad Implícita a través de las Opciones del IPC[®] listadas en MexDer
- El período de medición de la Volatilidad del índice es constante. Mide la volatilidad implícita en el corto plazo para 66 días hábiles de mercado (90 días naturales).

Insumos para calcular el VIMEX[®]

- Volatilidades implícitas de las Opciones del IPC[®].

⁷Europe's Global Financial Marketplace.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

- Nivel de cierre del IPC[®] al momento de cálculo.
- Vencimiento más cercano y siguiente más cercano listados en MexDer al momento del cálculo (dos precios de ejercicio por vencimiento).
- Días de negociación restantes para el vencimiento de las dos Opciones.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

En este apartado, se tratan los modelos ARCH y como caso general los modelos GARCH. Se revisan aspectos teóricos básicos, incluyendo la definición, primeros momentos, estimación y pruebas de verificación.

Como punto de partida se tiene el principio de las series de tiempo clásicas, esto es, se considera que el proceso estocástico generador es estacionario. En este sentido, como es difícil probar estacionariedad fuerte, solo se verifica para los primeros dos momentos: media y varianza del proceso, lo cual se conoce como estacionariedad en sentido amplio o débil, [De Arce \(2004\)](#).

2.6.1. Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresivo de Primer Orden (ARCH(1))

[Engle \(1982\)](#) introduce por primera vez modelos que consideran que la varianza evoluciona a través del tiempo. Tales modelos poseen características que los hacen capaces de modelar los cambios de la volatilidad de un período a otro.

Si una variable aleatoria Y_t tiene una función de densidad condicional $f(y_t|y_{t-1})$, la predicción del valor actual t , depende del valor obtenido de la variable aleatoria Y en el tiempo $t - 1$. Así mismo, la varianza condicional en el período t , $Var(Y_t|Y_{t-1})$, depende del valor Y_{t-1} , lo que implica que puede ser generada por una variable aleatoria. Esto no lo consideran los modelos de series de tiempo clásicos⁸, donde se supone varianza σ^2 homogénea.

Una alternativa para modelar la varianza condicional es hacerla depender de una función de tal manera que la varianza es positiva, $h_t = h(e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-p}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$. Así, el modelo ARCH(1) introducido por [Engle \(1982\)](#) está formado por dos ecuaciones: la

⁸En Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control. Rev. Ed., Hoden-Day, San Francisco y Hamilton, J. (1994). Time Series Analysis. Princeton University Press. se tienen dos buenas referencias.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

primera donde la variable depende del valor de su varianza y un término aleatorio, y, la segunda, compuesta por un término constante, valor medio, y otro término que hace depender la varianza del término observado un período anterior. Las ecuaciones están dadas de la forma:

$$y_t = \epsilon_t h_t^{1/2} \quad (2.1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 \quad (2.2)$$

con $\epsilon \sim WN(0, 1)$ ⁹.

Si se agrega el supuesto de normalidad a Y_t , entonces el modelo dado en (2.1) y (2.2) se puede representar como:

$$\begin{aligned} Y_t | \Omega_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde Ω_{t-1} es el conjunto de información hasta el tiempo $t - 1$.

Nótese que la esperanza y varianza no condicional, están dadas por:

$$\mu = E_{t-1} \{Y_t\} = E_{t-1} \{E_{t-1} [Y_t | \Omega_{t-1}]\} = 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var(Y_t) = E_{t-1} \{E_{t-1} [Y_t^2 | \Omega_{t-1}]\} = E_{t-1} \{h_t\} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E_{t-1} \{y_{t-1}^2\} = \alpha_0 + \alpha_1 Var \{y_{t-1}^2\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Puesto que el proceso es estacionario en sentido débil (2.5) implica que:

$$\sigma^2 = Var(Y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Para los momentos condicionales, de (2.3), se observa que

⁹Sin pérdida de generalidad se supone varianza unitaria aunque puede suponerse varianza σ^2 . La notación $WN(\mu, \sigma^2)$ especifica una secuencia de variables aleatorias iid con media μ y varianza σ^2 , conocida como ruido blanco.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$\begin{aligned} E_{t-1} \{Y_t | \Omega_{t-1}\} &= 0 \\ \text{Var}(Y_t) &= E_{t-1} \{Y_t^2 | \Omega_{t-1}\} = E_{t-1} \{h_t\} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Con esto se establece las siguientes condiciones ([Bahí \(2007\)](#)):

1. $0 < \alpha_0$. Esto corresponde a la mínima varianza condicional a ser observada.
2. $0 \leq \alpha_1 \leq 1$. Si no se cumple esto, el proceso no es estable ni estacionario.

Se han presentado resultados sobre los primeros dos momentos. Para los momentos de orden mayor, al suponer distribución normal, los momentos de orden impar, por simetría son cero. Mientras que para los momentos de orden par, [Engle \(1982\)](#) prueba su existencia y deriva un resultado para obtenerlos. Así mismo, obtiene el cuarto momento, la curtosis, el cual es importante para detectar si es plausible ajustar un modelo ARCH:

$$E_{t-1} \{Y_t^4 | \Omega_{t-1}\} = \left[\frac{3\alpha_0^2}{(1 - \alpha_1)^2} \right] \left[\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \right] = 3 [\text{Var}(Y_t)]^2 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}$$

Como puede verse, la curtosis es 3 veces la varianza al cuadrado por un factor que excede la unidad. En particular, si Y_t es normal como se ha supuesto, este resultado indica un cuarto momento mayor al presentado por una distribución normal, lo cual deriva en que el proceso Y_t acumula mayor densidad en sus colas. En particular, los momentos de cuarto orden podrían no existir, lo que ocurriría si $\alpha_1 < \sqrt{1/3}$. De este modo, puede probarse que al aumentar el valor de α_1 , se van teniendo resultados de inexistencia de momentos de orden par, ([Novales y Gracia-Diez, 1993](#)).

Con esto se ha mostrado que la varianza condicional varía en función de las realizaciones del proceso hasta el tiempo $t - 1$. Además, la varianza del proceso Y_t sigue un proceso AR(1) condicional sobre los cuadrados del proceso.

2.6.2. Modelo ARCH(p)

El modelo ARCH(1) se puede generalizar si a la ecuación (2.2) se le agregan términos autorregresivos de mayor rezago, esto es:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 \quad (2.6)$$

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

Como h_t es una varianza, los coeficientes α_i deben ser mayores a cero, tal como en el caso particular del modelo ARCH(1). Un coeficiente $\alpha_i < 0$ es evidencia de una mala especificación a pesar de ser compatible con $h_t > 0$. Para obtener los momentos nótese que sustituyendo (2.6) en (2.1), se tiene

$$y_t = \epsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2}$$

entonces, usando las propiedades de ϵ_t , los momentos condicionales son:

$$\begin{aligned} E_{t-1} \{Y_t | \Omega_{t-1}\} &= E_{t-1} \left\{ \epsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2} \right\} \\ &= E_{t-1} \{ \epsilon_t \} E_{t-1} \left\{ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2} \right\} \\ &= 0 \\ \text{Var} (Y_t | \Omega_{t-1}) &= E_{t-1} \{ Y_t^2 | \Omega_{t-1} \} = E_{t-1} \left\{ \epsilon_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2) \right\} \\ &= E_{t-1} \{ \epsilon_t^2 \} E_{t-1} \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2) \right\} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, los momentos no condicionales, están dados por:

$$\begin{aligned} E_{t-1} \{Y_t\} &= E_{t-1} \left\{ \epsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2} \right\} \\ &= E_{t-1} \{ \epsilon_t \} E_{t-1} \left\{ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2} \right\} \\ &= 0 \\ \text{Var} (Y_t) &= E_{t-1} \{ Y_t^2 \} = E_{t-1} \left\{ \epsilon_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2) \right\} \\ &= E_{t-1} \{ \epsilon_t^2 \} E_{t-1} \left\{ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2) \right\} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E_{t-1} \{ y_{t-1}^2 \} + \alpha_2 E_{t-1} \{ y_{t-2}^2 \} + \cdots + \alpha_p E_{t-1} \{ y_{t-p}^2 \} \\ \text{Var} (Y_t) &= \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p)} \end{aligned} \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) indica que $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$. Además, el orden del proceso es un indicador de la persistencia de la volatilidad; esto es, el orden del modelo es la cantidad de períodos anteriores que influyen en la predicción de la varianza. Esto trae como consecuencia un agrupamiento de períodos de la volatilidad, esto es, valores altos de la volatilidad proceden de valores igualmente altos y valores pequeños se siguen de valores pequeños.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

2.6.3. Modelo GARCH(p,q)

A pesar de que en la mayoría de las aplicaciones de los modelos ARCH, resultan de orden menor a 2, hay aplicaciones donde se requiere un elevado número de retardos por lo que se puede violar la restricción de no negatividad, [Peters \(2001\)](#). Esto llevó a buscar alternativas para reducir el número de parámetros del modelo. [Bollerslev \(1986\)](#) propone incluir resagos de la varianza, siguiendo los modelos clásicos de series de tiempo. Estos modelos, llamados ARCH generalizados o GARCH, tienen la cualidad de reproducir la volatilidad entre períodos como lo hacen los modelos ARCH con menos parámetros, lo cual los hace muy solicitados.

El modelo GARCH más sencillo es el GARCH(1,1), el cual, siguiendo a [Bollerslev \(1986\)](#)¹⁰, es dado por:

$$Y_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.8)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (2.9)$$

donde $\epsilon \sim WN(0, 1)$ y Ω_{t-1} es el conjunto de información hasta el tiempo $t - 1$.

De la ecuación (2.9), se requiere que $|\beta_1| < 1$ para conservar la estabilidad del modelo. Además, en aplicaciones, con frecuencia se obtiene que la suma $\alpha_1 + \beta_1$ es cercana a la unidad, con lo que h_t tiende a ser un proceso no estacionario¹¹. Por otro lado, [De Arce \(2004\)](#) señala que si se hace una serie de sustituciones recursivas en la ecuación (2.9), la varianza condicional puede ser escrita como una media ponderada del proceso Y_t ,

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \\ h_{t-1} &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2} \\ &\vdots \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}) \\ &= \dots = \\ &= \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{j-1} y_{t-i}^2 \end{aligned}$$

¹⁰Al igual que [Engle \(1982\)](#), se sigue distribución normal, pero bien se pueden suponer otras distribuciones.

¹¹Los procesos que cumplen $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ son conocidos como GARCH integrados, IGARCH.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

Así, se tiene que la varianza condicional está compuesta por una media sumada a una media ponderada decreciente de los valores del proceso, esto es equivalente a un proceso ARCH(∞). Esto es, el proceso GARCH, puede ser aproximado por un proceso ARCH de orden p con p suficientemente grande.

La generalización a un modelo GARCH(p, q) se sigue de manera inmediata a partir de la generalización del modelo ARCH(p). Formalmente, si Y_t se obtiene de una función de densidad condicional $f(y_t|\Omega_{t-1})$, la predicción del valor actual t , depende del valor obtenido de la información disponible hasta el tiempo $t - 1$, incluyendo la información de la varianza condicional. Un modelo que se adecua a esta variable aleatoria Y_t es:

$$Y_t|\Omega_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.10)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (2.11)$$

donde $p \geq 0, q > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$.

Obsérvese que los terminos del lado derecho de (2.11) indican la presencia de una media constante, noticias de la volatilidad de p períodos previos (rezagos al cuadrado del proceso Y_t) y la predicción de la varianza para los últimos q períodos.

Nótese que la varianza no condicional del modelo GARCH(p, q) está dada por¹²:

$$Var(Y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \beta_1 + \beta_2 \dots \beta_q)} \quad (2.12)$$

Por lo tanto, se requiere una restricción más para los parámetros, como se había visto para el caso GARCH(1,1):

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Bajo el supuesto de normalidad, [Bollerslev \(1986\)](#) muestra un resultado que es la generalización del resultado de [Engle \(1982\)](#) para los momentos de orden $2n$ del proceso GARCH(1,1).

Para un proceso GARCH(1,1), dado por las ecuaciones (2.8) y (2.9) una codición nece-

¹²Siguiendo procedimientos análogos a la obtención de la varianza condicional de un proceso ARCH(p).

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

saría y suficiente para la existencia del momento $2n$ es:

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i \alpha_1^i \beta_1^{n-i} < 1 \quad (2.13)$$

donde:

$$a_0 = 1, a_i = \prod_{j=1}^i (2j - 1), i \geq 1$$

Por otro lado, el cuarto momento de un modelo GARCH(1,1), debe cumplir que

$$3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1, \quad (2.14)$$

así, el segundo y cuarto momentos están dados por:

$$\begin{aligned} E \{Y_t^2\} &= \alpha_0 (1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1} \\ E \{Y_t^4\} &= 3\alpha_0^2 (1 + \alpha_1 + \beta_1) [(1 - \alpha_1 - \beta_1) (1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)]^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente de curtosis está dado por:

$$\left[E \{Y_t^4\} - 3E \{Y_t^2\}^2 \right] [E \{Y_t^2\}]^{-2} = 6\alpha_1^2 (1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)^{-1},$$

y que, bajo la hipótesis dada en (2.14), es mayor a cero. Por lo tanto, así como en el proceso ARCH, un proceso GARCH es leptocúrtico.

La representación de un proceso GARCH(p, q) como un ARCH(p), suponiendo que las raíces del polinomio $1 - B(\beta) = 0$ caen fuera del círculo unitario es como sigue:

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 [1 - \beta_1]^{-1} + \alpha(B) [1 - \beta(B)]^{-1} y_t^2 \\ &= \alpha_0 \left[1 - \sum_{i=1}^p \beta_i \right]^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j y_{t-j}^2 \end{aligned}$$

donde

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$\delta_i = \begin{cases} \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j}, & i = 1, \dots, q \\ \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j}, & i = q + 1, \dots \end{cases}$$

y donde $n = \min\{p, i - 1\}$. Si $\alpha(1)[1 - \beta(1)]^{-1} < 1$, entonces el proceso puede aproximarse por un proceso ARCH(p), con p suficientemente grande como en el caso de un GARCH(1,1). Pero el proceso GARCH es más parsimonioso, [Bollerslev \(1986\)](#).

2.6.4. Otras distribuciones

Se ha mencionado que los procesos de la familia GARCH presentan colas más pesadas que las de una distribución normal a pesar de suponer esta distribución para el proceso de errores. En aplicaciones no se habla del supuesto de normalidad más allá del análisis previo; mas bien, se considera la convergencia a la normalidad debido al tamaño de la muestra, tal como la que presenta [López-Herrera \(2004\)](#) respecto al IPC[®], quien da bandas de confianza para las autocorrelaciones considerando un valor de 2 y no 1.96 correspondiente a la distribución normal. Frecuentemente, los modelos GARCH con distribución normal no capturan de manera adecuada esta propiedad sobre las colas, por lo que es inmediato sugerir el uso de otras distribuciones. [Bollerslev \(1987\)](#), [Baillie y Bollerslev \(1989\)](#), [Kaiser \(1996\)](#) y [Beine et al. \(2002\)](#) entre otros usan la distribución t de Student; mientras [Nelson \(1991\)](#) y [Kaiser \(1996\)](#) sugieren la distribución de errores generalizada (GED, por sus siglas en inglés), [Peters \(2001\)](#) propone el uso de una distribución t de Student sesgada. Existen otros desarrollos que incluyen mezclas de distribuciones, pero no serán tratados en este trabajo.

Distribución t de Student

Si una variable aleatoria Y tiene distribución condicional t de Student con v grados de libertad, entonces la densidad de Y está dada por:

$$f_Y(y|\Omega_{t-1}) = \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\Gamma(v/2)} \frac{1}{\sqrt{(v-2)\pi}} \frac{1}{(1+y^2/[(v-2)])^{(v+1)/2}}$$

Con $y \in \Re$ y $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Se sabe que la distribución es simétrica alrededor de cero y su varianza es h_t . Otro momento de interés es la curtosis, que viene dada por $3(v-2)(v-4)^{-1} h_t^2$. Otro aspecto

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

relevante es que si $1/v \rightarrow 0$ la distribución t se aproxima a la distribución normal. Mientras, si $1/v > 0$ la distribución t tiene colas más pesadas que las correspondientes a una normal.

Distribucion de Errores Generalizada

Si Y es una variable aleatoria con distribución de errores generalizada estándar, es decir, media cero y varianza uno con $-\infty < y < \infty$ y $0 < v < \infty$, entonces la densidad de Y está dada por:

$$f(y) = \frac{v \exp \left[-\frac{1}{2} |y/\lambda|^v \right]}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(1/v)}$$

con $\lambda = [2^{-2/v} \Gamma(1/v) / \Gamma(3/v)]^{1/2}$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma definida anteriormente.

v es el parámetro de espesor de las colas. Es de mencionarse que cuando $v = 2$, se tiene una distribución normal. Si $v < 2$, la distribución tiene colas más pesadas que la normal y si $v > 2$, las colas son más ligeras. Cuando $v \rightarrow \infty$, se tiene una distribución uniforme en $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

2.6.5. Modelos con media μ_t como función del tiempo

Hasta el momento, se han tratado modelos únicamente para la varianza de una serie de tiempo. Esto es, se ha partido del supuesto dado por (2.1). Ahora se abordarán modelos con media μ_t como función del tiempo. Francq y Zakoian (2004) comentan: incluso en las series financieras parece muy restrictivo asumir que un proceso observado es un proceso ARCH o GARCH como los de Engle y Bollerslev. Permitir una parte ARMA del modelo extiende considerablemente el rango de aplicación, pero esto también atrae dificultades técnicas serias.

Desde la aparición de los modelos de la familia GARCH, al detectar posibles autocorrelaciones en la media y que esta depende del tiempo, se ha propuesto agregar una ecuación para modelarla. Un ejemplo de ello es el trabajo de Pantula (1988), donde deriva la distribución asintótica del estimador de mínimos cuadrados de un modelo $AR(p)$ con una raíz unitaria y con errores que siguen un proceso ARCH de primer orden. La mayoría de las investigaciones se han centrado en series de tiempo no estacionarias que siguen un proceso de perturbación tipo GARCH, Ling y Li (1997). Estos cubren los procesos estacionarios, que son los considerados en este trabajo.

Francq y Zakoian (2004) definen un modelo $ARMA(P,Q)$ -GARCH(p,q) estacionario co-

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

mo:

$$Y_t - \mu = \sum_{i=1}^P a_i (Y_{t-i} - \mu) - \sum_{j=1}^Q b_j e_{t-j} + e_t \quad (2.15)$$

$$e_t = \epsilon_t h_t^{1/2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (2.16)$$

donde $Y_t, t = 1, \dots, n$ es la serie observada estacionaria con $\epsilon \sim WN(0, 1)$ y $p \geq 0, q > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$.

Las principales investigaciones sobre estos modelos se centran en los métodos de estimación y propiedades de los estimadores, en específico la convergencia a la normalidad de los estimadores. Los métodos de estimación se tratan en secciones posteriores.

2.6.6. Modelos de Regresión con Errores GARCH

Otra clase de modelos importante donde se puede asumir la presencia de errores bajo un proceso GARCH son los de regresión. La mayoría de las aplicaciones donde se presenta es en series económicas, donde las variables son llamadas exógenas y endógenas¹³.

Asumir que un modelo de regresión no cumple con los supuestos del teorema de Gauss-Markov es cotidiano en las aplicaciones. Si no se cumplen los supuestos sobre los residuales (varianza constante y no correlacionados entre ellos) una solución factible es suponer que las perturbaciones aleatorias siguen un proceso GARCH. Un ejemplo de esto se obtiene en los modelos econométricos, donde se incluyen variables dependientes rezagadas (variables endógenas). Desde que Engle (1982) y Bollerslev (1986) propusieron los modelos ARCH y GARCH, respectivamente; plantean la solución a este problema a través de sus modelos. Se toma la idea de Bollerslev, ya que generaliza lo propuesto por Engle. Formalmente, sea $z'_t = (1, \epsilon_{t-1}^2, \epsilon_{t-2}^2, \dots, \epsilon_{t-p}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$, $w' = (\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$, $\theta = (\beta', w')$ y asumiendo que la media de un proceso Y_t está dada por $X_t \beta$, con X_t una matriz compuesta de variables endógenas y exógenas incluidas en el conjunto de información Ω_{t-1} y β un vector de parámetros no conocidos se tiene que un modelo de regresión con errores distribuidos como un proceso GARCH está dado por:

¹³Para lectores poco familiarizados, una buena referencia es Gujarati, D. (2003). Econometría, 4^o Edición. McGraw-Hill, México, D.F.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$\begin{aligned} Y_t | \Omega_{t-1} &\sim N(X_t \beta, h_t) \\ h_t &= z_t' w \\ \epsilon_t &= y_t - X_t \beta \end{aligned} \tag{2.17}$$

Estos modelos no se tratarán en los siguientes apartados de este capítulo, pero son generalizaciones de los resultados presentados. Solo se mencionan algunos aspectos, en particular, en el caso de estimación. Una interpretación de esta clase de modelos es que son una aproximación a los modelos que no tienen errores correlacionados. Esto es, la existencia de efectos GARCH puede ser interpretada como evidencia de variables omitidas y cambios estructurales; aunque incorporar las variables omitidas al análisis sería mejor que modelar una regresión GARCH o una regresión con suposiciones estándar.

En cuanto a la estimación, si la función h_t puede factorizarse como

$$h_t = h_\epsilon(1, \epsilon_{t-1}^2, \epsilon_{t-2}^2, \dots, \epsilon_{t-p}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p}) h_X(x_1, \dots, x_p)$$

Se puede hacer la estimación de los datos corrigiéndolos por las variables contenidas en la matriz X_t y después ajustar el modelo GARCH a los datos transformados. Este tema se retoma posteriormente.

2.6.7. Identificación del modelo

En esta sección se presentan algunos métodos para diagnosticar efectos GARCH en el análisis de series de tiempo. Unos tienen soporte teórico y otros son derivados de aplicaciones prácticas.

Estacionariedad

El primer paso es inspeccionar la gráfica de la serie. Aunado a ello, si es del área financiera, se debe sospechar que la serie presenta perturbaciones. La figura 2.6 corresponde al (IPC[®]) durante el período del 19 de abril de 1990 al 10 de febrero de 2003. Se observan severos cambios en los valores del IPC[®], sobre todo en el último tercio de la muestra, lo cual podría ser evidencia de efecto GARCH.

De la figura 2.6, es claro que la serie no es estacionaria, por tanto habrá que transformarla a una estacionaria. Para ello existen diferentes formas: rendimientos simples, rendimien-

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

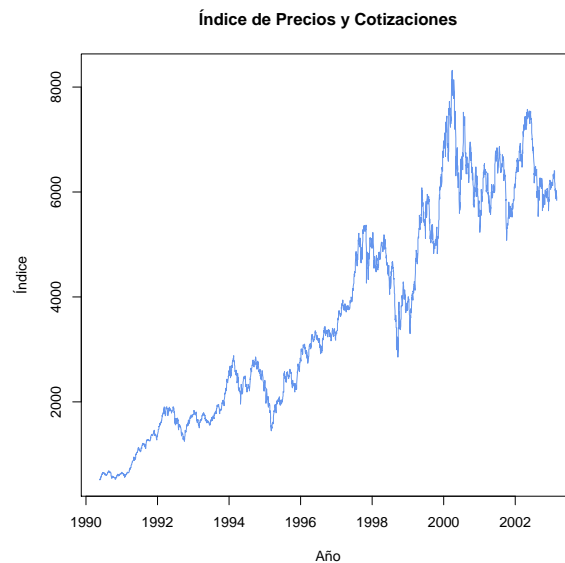


Figura 2.6: Gráfica del IPC[®] en el período del 19 de abril de 1990 al 10 de febrero de 2003.

tos logarítmicos¹⁴ o diferenciación de una serie. Sin embargo, hay ocasiones en que no es tan claro si la serie es o no estacionaria y se requiere un procedimiento analítico para verificarlo. En series de tiempo clásicas se tiene la prueba de Dickey-Fuller probando la existencia de raíces unitarias, pero dicha prueba no funciona en presencia de autocorrelación; así, se propuso la prueba de Dickey-Fuller aumentada.

Prueba de Dickey Fuller Aumentada

Asuma que se tiene una serie de rendimientos logarítmicos, denotada por Y_t y se quiere ver si los cambios en la serie siguen una caminata aleatoria, una caminata aleatoria con cambio o una caminata aleatoria con cambio y tendencia. Esto es, se quiere verificar si la serie es estacionaria. La prueba se basa en la existencia de raíces unitarias.

Para probar la existencia de una raíz unitaria, se puede probar la hipótesis $H_0 : \beta = 0$ vs $H_a : \beta < 0$ con β obtenido de la regresión:

$$\Delta y_t = c_t + \beta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t \quad (2.18)$$

estimada por mínimos cuadrados ordinarios y con $\Delta y_{t-i} = y_{t-i} - y_{t-i-1}$. Usualmente,

¹⁴En secciones posteriores se detalla la obtención de rendimientos.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$p = [\maxent(y - 1)]^{1/3}$. El estadístico de prueba es:

$$ADF = \frac{\hat{\beta}}{sd(\hat{\beta})}$$

Nótese que la prueba consiste en verificar la significancia de β en una regresión usual. El término c_t puede ser una función del tiempo o una constante. Es común hacer tres pruebas dado el parámetro c_t :

$$\begin{aligned}c_t &= 0 \\c_t &= c \\c_t &= c + \alpha t\end{aligned}$$

Los términos Δy_{t-i} y c_t ayudan a eliminar la autocorrelación.

La aplicación de la prueba es como sigue: verificar si hay tendencia lineal, posteriormente si hay tendencia con cambio y, finalmente, sin tendencia y sin cambio.

Si en (2.18) no se escribe la sumatoria se tiene la prueba Dickey-Fuller. Existen otras pruebas para verificar la existencia de raíces unitarias, entre las más conocidas están la prueba de Phillips-Perron¹⁵ y la prueba KPSS¹⁶. La figura 2.7 muestra una típica serie estacionaria de un proceso GARCH.

Especificación de la media del proceso

Una vez que se tiene una serie estacionaria, se debe ajustar un modelo de series de tiempo a la media del proceso. Para ello, se hace uso de la metodología de Box y Jenkins. Debe mencionarse que la selección del modelo se estila hacer a través del Criterio de Información Bayesiana (BIC) o Criterio de Información de Akaike (AIC); los cuales están dados por:

$$\begin{aligned}AIC &= -2 \ln(L) + 2k \\BIC &= -2 \ln(L) + k \ln(T)\end{aligned}$$

¹⁵Perron, P. (1988). Trends and random walks in macroeconomic time series. *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 297-332.

¹⁶Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. yShin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics* 54, 159-178.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

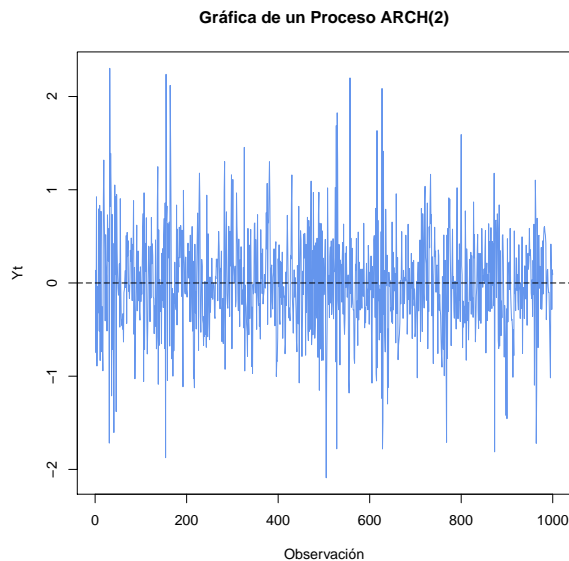


Figura 2.7: Gráfica de un proceso ARCH(2).

De entre estos criterios, es preferible el uso del BIC debido a que es asintóticamente mejor que el AIC y converge al modelo verdadero.

Especificación de la varianza del proceso

Una vez encontrado un posible modelo para la media, se deben obtener las estadísticas descriptivas de los errores obtenidos con tal modelo que caracterizan un modelo GARCH: media, varianza, asimetría, curtosis y prueba de normalidad, entre otras.

El uso de un histograma junto con la gráfica de la distribución normal correspondiente es bastante útil para decidir sobre la distribución de la nueva serie que se puede llamar residuales de la media.

Prueba de normalidad de Jarque-Bera

Las características que debe tener la serie para decidir si tiene efecto GARCH son ligera asimetría y alta curtosis. Basándose en estos dos momentos, [Jarque y Bera \(1980\)](#) proponen una prueba que determina si los residuales ϵ_t en una serie son normales, independientes e idénticamente distribuidos. Dicha prueba es caso general de la conocida prueba de Jarque-Bera para probar normalidad. La prueba se basa en considerar la familia de distribuciones de Pearson, que incluye como casos particulares a la normal, beta, gamma, entre otras, dada por:

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$g(\epsilon_t) \propto \exp \left\{ \int (c_1 - \epsilon_t) / (c_0 - c_1\epsilon_t + c_2\epsilon_t^2) d\epsilon_t \right\}$$

Si $c_1 = c_2 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \exp \int [(c_1 - \epsilon_t) / (c_0 - c_1\epsilon_t + c_2\epsilon_t^2)] d\epsilon_t &= \exp \int [-\epsilon_t/c_0] d\epsilon_t \\ &= \exp(-\epsilon_t^2/2c_0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por tanto, (2.19) es una distribución normal con media cero y varianza c_0 .

Así, haciendo $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, con $\theta_1 = (c_0)$ y $\theta_2 = (c_1, c_2)$, se puede plantear el juego de hipótesis $H_0 : \theta_2 = 0$ vs $H_1 : \theta_2 \neq 0$. Haciendo uso del procedimiento de Multiplicadores de Lagrange, se puede demostrar que el estadístico de prueba

$$JB = \frac{Tb_1}{6} + \frac{T(b_2 - 3)^2}{24} \sim \chi_2^2$$

Con $b_1 = \bar{\epsilon}_3^2/\bar{\epsilon}_2^3$, $b_2 = \bar{\epsilon}_4/\bar{\epsilon}_2^2$, $\bar{\epsilon}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^j$. Los terminos en el estadístico JB son los cuadrados de la curtosis y asimetría muestral estandarizados, respectivamente. Cada uno de ellos con distribución χ_1^2 .

Debe hacerse notar que esta prueba está basada suponiendo los residuales conocidos; sin embargo, se puede mostrar que si se usan los residuales de un modelo ajustado por mínimos cuadrados ordinarios, las propiedades asintóticas de la prueba no se ven afectadas. Así, se rechaza que los residuales provengan de una distribución normal si $JB > \chi_{2;\alpha}^2$. Si se rechaza la prueba de normalidad, entonces se da por hecho que la curtosis o la asimetría son mayores a las de una distribución normal estándar. Por tal motivo es factible el uso de modelos GARCH para modelar la varianza del proceso.

Orden del modelo GARCH

Considere la siguiente especificación que considera los errores de un proceso como una especificación GARCH dado por la ecuación (2.16): $v_t = e_t^2 - h_t$, donde se puede demostrar que v_t es una sucesión de ruido blanco. Haciendo sustituciones, se tiene:

$$e_t^2 = v_t + h_t = v_t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$\begin{aligned}
 &= v_t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j (e_{t-j}^2 - v_{t-j}) \\
 &= v_t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j v_{t-j} \\
 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j v_{t-j} + v_t
 \end{aligned}$$

Así, es claro que los errores que siguen un proceso GARCH(p, q) tiene una representación ARMA(m, q), con $m = \max\{p, q\}$; de manera mas general, si Y_t es un proceso GARCH, entonces puede ser representado como un modelo ARMA(m, q). Por tanto, como sugiere [Bollerslev \(1986\)](#), para identificar el orden de un modelo GARCH, se pueden usar las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial. Aunque en la práctica y recordando que un proceso ARCH(p), cuando p es suficientemente grande, puede representarse como un proceso GARCH(1,1). Los modelos más usados son los GARCH(1,1) hasta GARCH(3,3).

Al igual que en el modelo para la media, la selección del modelo para la varianza se hace mediante los criterios bayesiano y de Akaike. Sin embargo, también puede ser a través de los diagnósticos de predicción. Para ello, primero se debe decidir que metodología usar; primero, la muestra se divide en dos períodos: para estimación de r observaciones y para predicción, $n - r$ observaciones.

1. Esquema recursivo. Se estima el modelo con la muestra de estimación y se predice la observación $r + 1$. Se agrega la observación $r + 1$ a la muestra de estimación y se estima el modelo nuevamente. Este procedimiento se repite hasta que se estima el modelo con las n observaciones.
2. Esquema rodante. Se estima el modelo con las primeras r observaciones y se predice la observación $r + 1$. Se estima nuevamente el modelo agregando la observación $r + 1$ y quitando la observación 1. Con este nuevo modelo, se produce la predicción $r + 2$. Se agrega esta observación, se elimina la observación 2 y se estima el modelo nuevamente. El modelo se estima en cada uno de los períodos de predicción con el tamaño de muestra r .
3. Esquema fijo. En este esquema se ajusta el modelo con la muestra de estimación y con este modelo se predice todo el período de predicción. La observación del período $r + 1$ solo sirve para actualizar el conjunto de información y la predicción de la observación $r + 2$, pero no para la estimación del modelo.

Es claro que cada esquema tiene ventajas y desventajas. La principal ventaja del esquema recursivo es que incorpora toda la información disponible en la predicción de un período,

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

pero tiene la desventaja de que si la serie tiene cambios estructurales, la estabilidad del modelo está en peligro. El esquema rodante tiene la ventaja de ser más robusto a cambios estructurales, pero tiene el problema de inestabilidad. Por último el esquema fijo es más rápido y conveniente por solo ajustar un modelo, el detalle es que no permite la actualización de los parámetros.

Verificación de supuestos

Para verificar el supuesto sobre los residuales del proceso GARCH ($\epsilon_t \sim WN(0, 1)$), basta con calcular los estadísticos de la media y varianza. Pueden hacerse pruebas de hipótesis convencionales sobre estos parámetros, pero solo como referencia porque no se cumplen los supuestos de las pruebas. Además, una gráfica de las autocorrelaciones parciales de los residuales mostraría la independencia.

2.6.8. Estimación

Modelos GARCH(p,q) con distribución normal

Se ha mencionado como seleccionar el modelo, pero no como se efectúa la estimación. En esta sección se trata este tópico. Para ello, se toma el modelo GARCH, dado que el modelo ARCH es un caso particular de este modelo. Aunado a ello, se toma el método de Quasi-Máxima Verosimilitud¹⁷ para la estimación.

Considere el proceso definido por las ecuaciones dadas en (2.10) y (2.11). La función de densidad condicionada para cada t esta dada por:

$$f(y_t|\Omega_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left\{-\frac{y_t^2}{2h_t}\right\}$$

En virtud que las observaciones condicionales son independientes unas de otras, se tiene que la función de verosimilitud está dada por:

$$L(\underline{y}; \underline{\alpha}|\Omega_{t-1}) = \prod_{t=1}^n f(y_t|\Omega_{t-1}) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left\{-\frac{y_t^2}{2h_t}\right\} = \frac{1}{\prod_{t=1}^n \sqrt{2\pi h_t}} \exp\left\{-\sum_{t=1}^n \frac{y_t^2}{2h_t}\right\}$$

¹⁷ Bollerslev, T. y Wooldrige, J.M. (1992). Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances. *Econometric Reviews*, 11, pp 143-172 son los primeros en mostrar que estos estimadores son consistentes y eficientes sin importar la distribución asociada a la perturbación aleatoria del modelo.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

Sguiendo los pasos de Engle y Bollerslev, considere l como el promedio del logaritmo de la Quasi-Verosimilitud y l_t como el logaritmo de la Quasi-Verosimilitud:

$$l = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t \quad (2.20)$$

$$l_t = -\frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log h_t - \frac{1}{2} y_t^2 / h_t \quad (2.21)$$

Para estimar el vector de parámetros $\underline{\alpha}$, donde $h_t = f(\underline{\alpha})$, se deben encontrar la primera y segunda derivadas de la función l , vector gradiente y matriz hessiana, respectivamente. Así;

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial \underline{\alpha}} &= -\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} + \frac{y_t^2}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1 \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} &= -\frac{1}{2h_t} \frac{y_t^2}{h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}'} + \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1 \right] \left[\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} - \frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}'} \right] \\ &= -\frac{1}{2h_t^2} \frac{y_t^2}{h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}'} + \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1 \right] \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}'} \left[\frac{1}{2h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

La expresión en (2.11), se puede expresar en notación matricial como $h_t = \underline{z}_t \underline{\alpha}$ haciendo $\underline{z}_t = (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \dots, y_{t-p}^2, h_{t-1}, h_{t-2}, \dots, h_{t-q})$ y $\underline{\alpha}' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$. Así,

$$\frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} = \underline{z}_t + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial \underline{\alpha}} \quad (2.24)$$

Para hacer la maximización de la ecuación (2.20), se usa el algoritmo Berndt, Hall, Hall Y Hausman¹⁸; debido a que aparecen términos recursivos y es el algoritmo que mejor se adapta a la maximización. Para ello, se necesitan la matriz de información, la cual esta dada por el valor negativo de la esperanza de la matriz hessiana. Para ello nótese que:

$$E \left[\frac{y_t^2}{h_t} \right] = \frac{E[y_t^2]}{h_t} = \frac{h_t}{h_t} = 1$$

¹⁸Berndt, E., Hall, B., Hall, R. y J. Hausman. (1974). Estimation and inference in nonlinear structural models. Annals of Economic and Social Measurement, 3. pp 653-665.

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

Por lo tanto,

$$-E \left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} \right] = \frac{1}{2h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}} \frac{\partial h_t}{\partial \underline{\alpha}'}$$

De esta manera, el algoritmo de estimación viene dado por:

$$\hat{\underline{\alpha}}_{i+1} = \hat{\underline{\alpha}}_i + \lambda_i \left[\sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} \right]_{\hat{\underline{\alpha}}_i}^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t}{\partial \underline{\alpha}}$$

donde λ_i es un parámetro de salto. En el algoritmo usado, se obtiene a partir de una regresión de unos sobre la matriz $\partial l_t / \partial \underline{\alpha}$.

El modelo ARCH(p) es un caso particular del proceso de estimación anterior. En el caso de este modelo, se tiene que el vector gradiente y la matriz hessiana están dadas por las ecuaciones (2.22) y (2.23), pero en (2.23) no aparece el término recursivo y $\underline{z}_t = (1, y_{t-1}^2, y_{t-2}^2, \dots, y_{t-p}^2)$; por lo tanto pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial \underline{\alpha}} &= \frac{1}{2h_t} \underline{z}_t \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1 \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} \right] &= \frac{1}{2h_t^2} \underline{z}_t \underline{z}_t' \end{aligned}$$

El algoritmo utilizado para estimar el modelo ARCH es el algoritmo scoring de Fisher:

$$\hat{\underline{\alpha}}_{i+1} = \hat{\underline{\alpha}}_i + \left[\sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}'} \right]_{\hat{\underline{\alpha}}_i}^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t}{\partial \underline{\alpha}}$$

Nótese que la diferencia en el algoritmo de estimación es la exclusion del término λ_i .

Modelos ARMA(P, Q)-GARCH(p, q)

Se ha mencionado que suponer que los errores de un proceso ARMA siguen un proceso GARCH, generaliza el rango de aplicación; sin embargo, no son generalizaciones inmediatas, como demuestran [Francq y Zakoian \(2004\)](#). El método de estimación de un proceso ARMA-GARCH es mediante Quasi-Máxima Verosimilitud, semejante al caso GARCH.

El logaritmo de la función de Quasi Verosimilitud es la misma que aparece en (2.21), salvo que el vector de parámetros ahora sera denotado por $\underline{\psi}' = (a_1, a_2, \dots, a_P, b_1, b_2, \dots, b_Q, \underline{\alpha})$. Es claro que el modelo GARCH se ajusta a los residuales de la parte ARMA, dados por:

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$e_t = Y_t - \mu - \sum_{i=1}^P a_i (Y_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^Q b_j e_{t-j}$$

Para la especificación de los valores iniciales ver [Francq y Zakoian \(2004\)](#).

Modelos GARCH con distribución no normal

En secciones previas, se mencionó el uso de otras distribuciones para modelar un proceso GARCH. En esta sección se dan las funciones de verosimilitud para las distribuciones mencionadas. El proceso para estimar los parámetros es el mismo como en el caso de la distribución normal: derivar y maximizar mediante procesos iterativos.

Distribución t de Student

Si se asume que las perturbaciones aleatorias ϵ_t siguen una distribución t de Student y usando $y_t = \epsilon_t h_t^{1/2}$, entonces la función de Verosimilitud para un proceso GARCH está dada por:

$$L(y; \alpha) = \prod_{t=1}^n \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\Gamma(v/2)} \frac{1}{\sqrt{(v-2)\pi h_t^{1/2}}} \frac{1}{(1+y^2/(v-2)h_t)^{(v+1)/2}}$$

Para encontrar las estimaciones de esta función de verosimilitud, se pueden especificar los grados de libertad o estimarlos de manera conjunta con el resto de los parámetros. Si no son especificados, la función de log verosimilitud es:

$$\begin{aligned} l &= \ln [L(y; \alpha)] = \ln \left[\prod_{t=1}^n \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\Gamma(v/2)} \frac{1}{\sqrt{(v-2)\pi h_t^{1/2}}} \frac{1}{(1+y^2/(v-2)h_t)^{(v+1)/2}} \right] \\ &= \sum_{t=1}^n \ln \Gamma[(v+1)/2] - \sum_{t=1}^n \ln \Gamma(v/2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (v-2) \ln \pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln h_t - \frac{v+1}{2} \sum_{t=1}^n \left(1 + \frac{y^2}{(v-2)h_t} \right) \\ &= T \ln \Gamma[(v+1)/2] - T \ln \Gamma(v/2) - \frac{T}{2} (v-2) \ln \pi - \sum_{t=1}^n \left[\left(1 + \frac{y^2}{(v-2)h_t} \right) + \frac{1}{2} \ln h_t \right] \end{aligned}$$

Cuando se especifican los grados de libertad un valor entre 4 y 8, frecuentemente es usado. Bajo estas condiciones, la función de log verosimilitud está dada por:

$$l = \ln [L(y; \alpha)] = - \sum_{t=1}^n \left[\left(1 + \frac{y^2}{(v-2)h_t} \right) + \frac{1}{2} \ln h_t \right]$$

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

Como en el caso de una distribución normal, esta función se maximiza a través de Quasi-Máxima Verosimilitud.

Distribución de Errores Generalizada

Como se mencionó en apartados anteriores, otra distribución frecuentemente asumida en el modelado de un proceso GARCH es la distribución de errores generalizada. Si se permite que ϵ_t siga una distribución de errores generalizada y sustituyendo $\epsilon_t = y_t/h_t^{1/2}$, entonces la función de verosimilitud está dada por:

$$L(y; \alpha) = \prod_{t=1}^n \frac{v \exp\left[-\frac{1}{2} \left| y/\lambda h_t^{1/2} \right|^v\right]}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(1/v)}$$

La función de log verosimilitud es:

$$\begin{aligned} l &= \ln [L(y; \alpha)] = \ln \left[\prod_{t=1}^n \frac{v \exp\left[-\frac{1}{2} \left| y/\lambda h_t^{1/2} \right|^v\right]}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(1/v)} \right] \\ &= \sum_{t=1}^n \ln \left\{ v \exp\left[-\frac{1}{2} \left| y/\lambda h_t^{1/2} \right|^v\right] \right\} - \sum_{t=1}^n \ln [\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(1/v)] \\ &= \sum_{t=1}^n \ln v - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left| y/\left(\lambda h_t^{1/2}\right) \right|^v - \sum_{t=1}^n \ln \lambda - \left(1 + \frac{1}{v}\right) \sum_{t=1}^n \ln 2 - \sum_{t=1}^n \ln \Gamma(1/v) \\ &= \sum_{t=1}^n \left[\ln \frac{v}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{y}{\lambda h_t^{1/2}} - \left(1 + \frac{1}{v}\right) \ln 2 - \ln \Gamma(1/v) - \frac{1}{2} \ln h_t \right] \end{aligned}$$

Una vez más, el método de estimación es por Quasi-Máxima Verosimilitud.

2.6.9. Generalizaciones de Modelos GARCH

Una desventaja de los modelos ARCH y GARCH en su carácter simétrico es que dan el mismo peso a shocks negativos y positivos; sin embargo, esto no se observa en situaciones prácticas. Por tal motivo se han desarrollado otros modelos que sí consideran el carácter asimétrico de la volatilidad. Aunado a ellos, otros modelos desarrollados consideran que la volatilidad también debe afectar a la media del proceso. A continuación se describen los modelos más utilizados. Para un panorama más amplio sobre las variantes de modelos ver [De Arce \(2004\)](#).

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

GARCH-M

Este modelo tienen la característica de introducir en la ecuación de la media a la varianza condicional; esto es, asume que la varianza es una medida de riesgo. El modelo está dado por:

$$\begin{aligned}y_t &= a_1 + a_2 h_t + e_t \\e_t &= \epsilon_t h_t^{1/2} \\h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}\end{aligned}$$

Un valor positivo de a_2 indica que el rendimiento está correlacionado positivamente con la volatilidad, mientras un valor negativa indica correlación negativa. Estos modelos son utiles para evaluar el rendimiento de acciones debido a que la volatilidad repercute en el rendimiento ante especulaciones.

Modelo IGARCH

En muchas ocasiones, la suma de los parámetros de un modelo GARCH se acerca a uno, originando que el modelo no sea estacionario. [Engle y Bollerslev \(1986\)](#) propusieron un modelo en el que los parámetros de un modelo GARCH(1,1) sumaran uno, originando un modelo GARCH integrado. El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}y_t &= \epsilon_t h_t^{1/2} \\h_t &= \alpha_0 + h_{t-1} + \alpha_1 (y_{t-1}^2 - h_{t-1})\end{aligned}$$

Bajo normalidad condicional, se puede mostrar que este proceso es estacionario y ergódico.

Modelo EGARCH

Debido a que las restricciones de no negatividad en los parámetros de un modelo GARCH es un tanto complicado satisfacer y que no captan toda la asimetría de un proceso financiero; esto es, la volatilidad se comporta de diferente manera al recibir noticias buenas

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

que malas; Nelson (1991) propuso el modelo llamado GARCH exponencial o EGARCH (por sus siglas en inglés). Este modelo se expresa como:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \epsilon_t h_t^{1/2} \\
 \log h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \log h_{t-i} + g(\epsilon_t) + \sum_{j=1}^q \alpha_j g(\epsilon_{t-1-j}) \\
 g(\epsilon_t) &= \delta \epsilon_t + \theta (|\epsilon_t| - E\{|\epsilon_t|\}) \\
 \epsilon_t &\sim N(0, 1)
 \end{aligned}$$

Nótese que $\delta \epsilon_t$ proporciona el efecto del signo y $\theta (|\epsilon_t| - E\{|\epsilon_t|\})$ es la magnitud del signo. Debido a que los shocks negativos tienden a tener mayores repercusiones, se espera que el valor de δ sea negativo.

Model GJR-GARCH

Este modelo, al igual que el modelo EGARCH, considera los efectos de noticias positivas y negativas. El modelo está dado por:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \epsilon_t h_t^{1/2} \\
 h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i y_{t-i}^2 + \omega_i S_{t-i}^- y_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_t
 \end{aligned}$$

donde S_{t-i}^- es una variable dummy, que toma el valor 0 si y_t es positivo y 1 si y_t es negativo. Así, los efectos negativos tienen mayor repercusión que los efectos positivos.

Modelo APARCH

Este modelo es de especial interés debido a la flexibilidad que le da un exponente variable (δ) junto al coeficiente de asimetría (γ). El modelo está dado por:

2.6. Modelos Autorregresivos de Varianza Condicional Heterocedástica Generalizados (GARCH)

$$y_t = \epsilon_t h_t^{1/2}$$
$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|y_{t-i}| - \gamma_i y_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j h_t^\delta$$

donde $\alpha_0 > 0$, $\delta \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ y $-1 < \gamma_i < 1$.

Como casos particulares de este modelo se tienen los modelos:

- ARCH si $\delta = 0$, $\gamma_i = 0$ y $\beta_j = 0$.
- GARCH cuando $\delta = 0$ y $\gamma_i = 0$.
- GJR si $\delta = 2$.

Caso multivariado

Por otro lado, las extensiones al caso multivariado no se hicieron esperar, los trabajos pioneros se deben a [Engle *et al.* \(1984\)](#), [Bollerslev *et al.* \(1988\)](#), [Engel y Rodrigues \(1987\)](#), [Ling y Deng \(1993\)](#), entre otros, como mencionan [Ling y McAleer \(2001\)](#). Por otro lado, [Tsay \(2010\)](#) ofrece todo un capítulo dedicado al análisis de modelos multivariados incluyendo aplicaciones sobre índices de diversos mercados del mundo. [Ludlow y Mota \(2006\)](#) realizan un análisis multivariado que involucra al IPC[®] de México, Nasdaq y S&P 500 de Estados Unidos.

Capítulo 3

Análisis de la volatilidad del Índice de Volatilidad México

En este apartado se aplica la metodología descrita en el capítulo anterior para analizar la serie del VIMEX[®]. Los datos fueron obtenidos de la página delMexDer (www.mexder.com.mx). Los datos son diarios¹ (un total de 1581 observaciones) y corresponden al período del 26 de marzo del 2004 al 30 de junio del 2010.

3.1. Análisis exploratorio

En la figura 3.1, se muestra el comportamiento del VIMEX[®]. Se observan varios períodos para comentarse. En el primero, de marzo de 2004 a mayo de 2006, se mantiene constante con ligeras variaciones hasta la mitad del período. Posteriormente vienen tres períodos de alza. En el primero de ellos, atribuido a la incertidumbre generada por la elección presidencial, cuando llega al máximo, en septiembre de 2006, se observa una baja al mismo ritmo que el alza, pero no al mismo nivel asociada a la culminación del proceso electoral. Ahi se mantiene constante desde finales de septiembre de 2006 a noviembre de 2007. Con la crisis financiera mundial, el indicador comienza el alza, llegando al máximo en enero de 2008 y comienza a decaer de forma más lenta que el alza. En esta baja, el punto mínimo lo toma en septiembre de 2008. A partir de esta fecha, comienza el tercer período de alza, alcanzando un máximo histórico en diciembre de 2008. A partir de este máximo, comienza a decaer, estabilizándose de septiembre de 2009 a la fecha alrededor de los 25 puntos porcentuales tal como sucedió de septiembre de 2006 a noviembre de 2007, pero observándose mayor variabilidad.

¹Se hace referencia a datos obtenidos de días laborales, esto es, se excluyen fines de semana y días festivos.

3.1. Análisis exploratorio

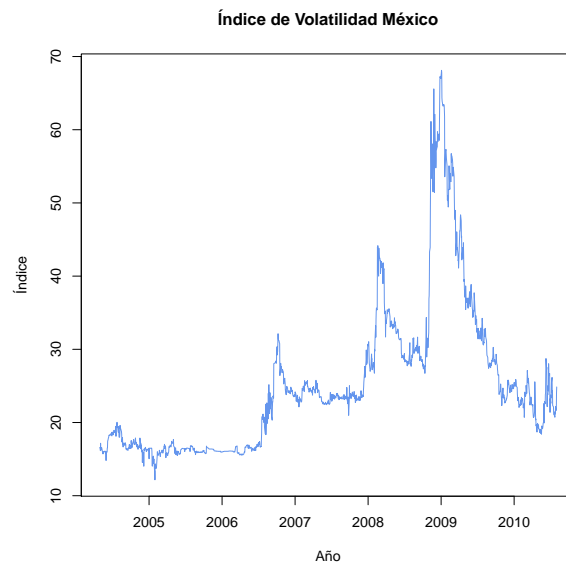


Figura 3.1: Gráfica del VIMEX[®] en el período del 26 de marzo de 2004 al 30 de junio de 2010.

La distribución del VIMEX[®] está dada en la figura 3.2; a simple vista no se trata de la distribución normal.

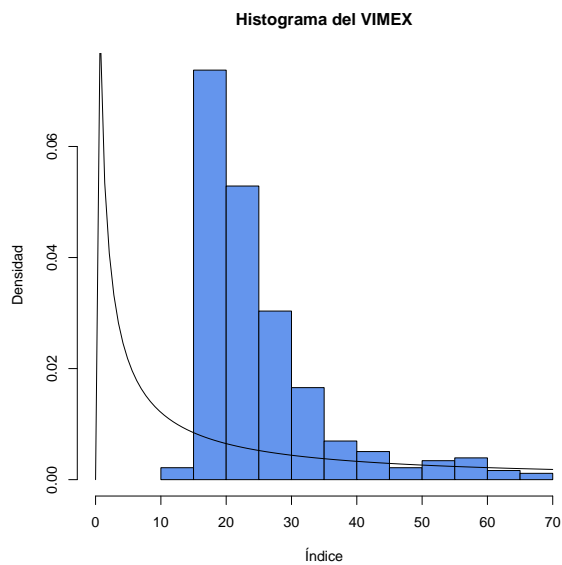


Figura 3.2: Histograma del VIMEX[®].

3.1. Análisis exploratorio

3.1.1. Transformación del Índice en Rendimientos

Como se mencionó antes, el índice se mide en puntos porcentuales, lo cual indica que no hay valores negativos. Así, no se puede suponer distribución normal a los datos del indicador, lo que corrobora lo mostrado en la figura 3.2. Para resolver este problema, se supondrá que el indicador tiene distribución lognormal y se obtienen los rendimientos logarítmicos, que, por ser incrementos, generan variables independientes, tal como se ha supuesto en la valuación de opciones, dados por:

$$r_t = 100 \times \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \quad (3.1)$$

donde:

r_t : rendimiento en el período t

P_t : valor del índice en el período t

Aunado al resultado teórico sobre distribuciones, los rendimientos logarítmicos se prefieren porque obtener rendimientos semanales, mensuales, etc, es más sencillo, directo y exacto que con los rendimientos simples:

$$\begin{aligned} r_{[k]} &= \sum_{t=1}^k r_t \\ r_{[k]} &= \prod_{t=1}^k (1 + R_t) \end{aligned}$$

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

donde k es el período que se quiere obtener contado en el período base.

En este trabajo se utilizarán rendimientos semanales. Para calcularlos, no se consideró ajuste alguno por días festivos; esto es, se calcularon considerando los datos existentes para cada semana. Al transformar la serie a rendimientos semanales, la muestra se reduce a 326 observaciones en el mismo período: del 26 de marzo del 2004 al 30 de junio del 2010.

3.1. Análisis exploratorio

De esta manera, los rendimientos ahora tienen, hipotéticamente, distribución normal. En la figura 3.3, se muestra el comportamiento de esta nueva serie llamada rendimiento. En ella se observan períodos de baja, media y alta volatilidad. Se observa que los períodos donde la volatilidad es baja corresponden a períodos donde el índice es estable. Los períodos de mediana volatilidad corresponden a los períodos donde el indicador crece y decrece. Los intervalos donde la volatilidad es mayor, es donde se presentan los cambios mayores en el índice.

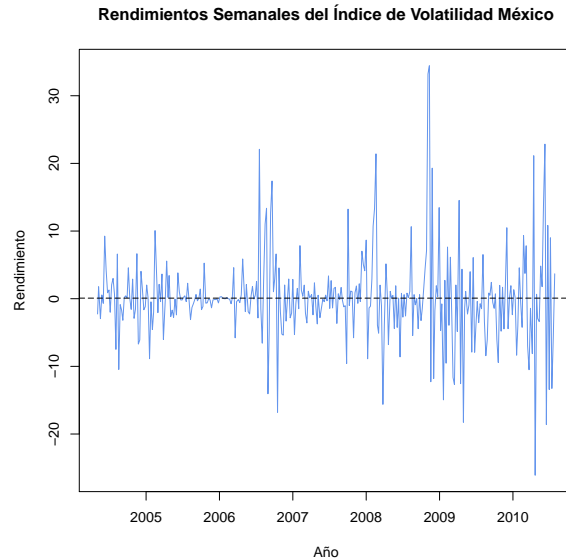


Figura 3.3: Gráfica de los rendimientos semanales del VIMEX®.

3.1.2. Descripción de los rendimientos semanales

En cuanto a los momentos muestrales de la serie se refiere que la media está muy cercana a cero (0.08485), lo que indica que hay poca volatilidad de una semana a otra en el indicador; mientras que la desviación estándar es alta: 6.58326. Dos momentos de interés son la curtosis y el coeficiente de asimetría. El primero indica que tan concentrados están los valores en la media de la distribución. El segundo el nivel de simetría de la distribución.

Para una distribución normal estándar, la curtosis es 3. Aunque la distribución presentada por los datos no es normal estándar (cumple con el valor de la media, pero no en varianza), en la figura 3.4 se observa que no tiene la curtosis de una distribución normal correspondiente a la media y desviación estándar de los datos (línea negra); la distribución de los datos es leptocúrtica (tal como lo muestra su valor muestral, 5.88042) y se observa una distribución de colas pesadas. En relación a la asimetría, los datos sí

3.1. Análisis exploratorio

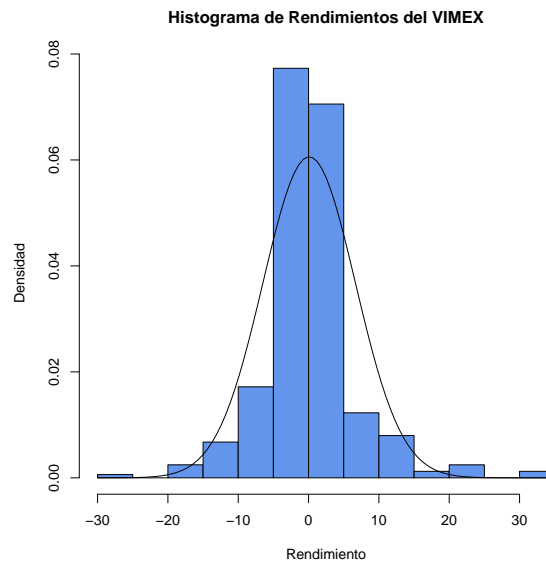


Figura 3.4: Histograma de los rendimientos semanales del VIMEX[®]. La línea continua representa la densidad estimada.

la presentan (0.95127). La cola derecha contiene valores más alejados del centro de la distribución, aunque la cola izquierda acumula más información en el rango de -10 a 0 .

Se ha mencionado que la media es cercana a cero. Para verificar esto, se efectuó una prueba de t , confirmándose que los rendimientos presentan media cero con un valor de probabilidad de 0.8161.

Así, se concluye que los datos tienen media cero, con desviación estándar cercana a 6.6. Se tiene una distribución leptocúrtica, esto es, los valores se concentran más cerca de la media, y asimétrica, ligeramente cargada a la derecha. Además, la no normalidad de los datos se corrobora con la prueba Jarque-Bera cuyo valor de probabilidad es menor a 0.0001.

De la figura 3.3, la serie de rendimientos es estacionaria en media, lo cual se corrobora con el estadístico de Dickey -Fuller aumentado. También se usó la prueba de Phillips-Perron teniendo la misma conclusión con un valor de p semejante., cuyo valor de probabilidad es menor a 0.01 y donde la hipótesis nula es que la serie no es estacionaria. Así mismo, como la prueba se basa en una regresión de mínimos cuadrados sobre los valores y_t contra valores rezagados y_{t-1} , se detecta que es factible agregar un proceso $AR(1)$ a la ecuación de la media en el ajuste de modelos ARCH y GARCH.

3.1. Análisis exploratorio

3.1.3. Autocorrelación de la media y varianza

En este sentido, para ver si hay más retardos que influyan en la ecuación de la media del proceso GARCH, una alternativa es la gráfica de autocorrelaciones parciales. En ella (figura 3.5) se detecta que hay rezagos del orden 8 que pueden considerarse diferentes de cero. Se verificará si los rezagos de orden menor o igual a 10 son significativos.

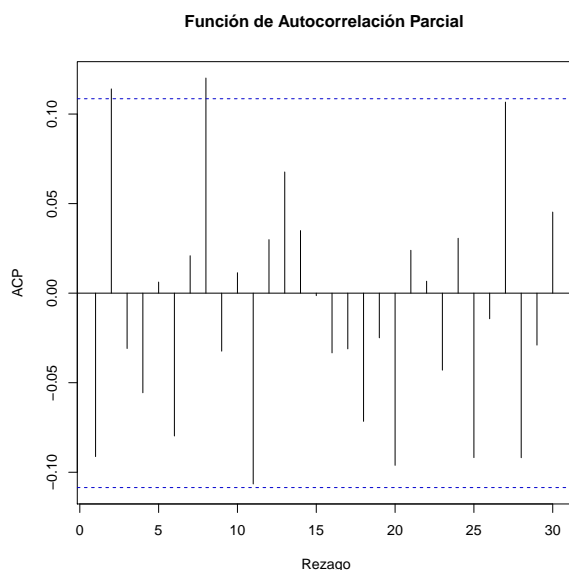


Figura 3.5: Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los rendimientos semanales del VIMEX®.

Para reducir el número de rezagos que posiblemente se incluyan en la ecuación de la media, se usó el procedimiento backstep de SAS, el cual hace una eliminación hacia atrás considerando el nivel de significancia especificado, en este caso fue 0.05. Este procedimiento elimina los parámetros una vez que son estimados a través del método de Yule-Walker. En la tabla 3.1 se muestran los parámetros en el orden que se eliminaron con su respectivo valor de probabilidad. Se observa que el único rezago no significativo a un nivel del confianza del 95 % fue el dos; por tanto, se ajustarán modelos para la media que incluyan rezagos de orden dos aunado a la parte que modelará la volatilidad:

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-2} + e_t \quad (3.2)$$

Después de ajustar un modelo $AR(2)$ sin considerar si el coeficiente es significativo, se requiere verificar si la serie de los residuales es heterocedástica, y así decidir si es factible ajustar un modelo GARCH. La figura 3.6 muestra la serie de residuales obtenidos del modelo $AR(2)$. En ella se observan tres períodos distintos en cuanto a heterogeneidad de los residuales. El primero es un período donde la volatilidad es mínima. A lo largo del

3.1. Análisis exploratorio

Tabla 3.1: Coeficientes autorregresivos eliminados de la ecuación de la media.

Rezago	Valor-p
5	0.9887
10	0.8394
9	0.5638
7	0.5852
3	0.4908
4	0.4901
1	0.1249

período muestreado, se observan los otros dos períodos: uno en el que hay una volatilidad media alternándose con períodos de alta volatilidad. Por tanto, se tiene evidencia gráfica para decir que la serie de rendimientos presenta heterogeneidad de varianza.

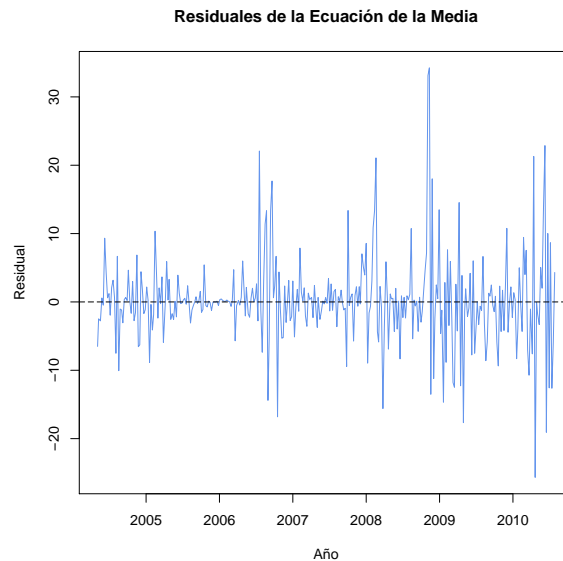


Figura 3.6: Gráfica de los residuales del modelo ajustado autorregresivo de segundo orden, $AR(2)$.

El siguiente paso en el análisis previo es dar un vistazo a los residuales del modelo $AR(2)$ ajustado a la serie de rendimientos del VIMEX[®]. Para ello, se revisa la función de autocorrelaciones parciales de los errores y los errores al cuadrado.

Al ajustar un modelo $AR(2)$, se observa claramente que no hay correlación en los retardos de los errores, salvo en los retardos 8 y 11 (figura 3.7), pero son tan pequeños que pueden ser debidos a la muestra, aunado a que rezagos tan lejanos no influyen en el valor actual de los índices, como prueban de manera práctica Bahí (2007) y López-Herrera (2004) trabajando con rendimientos diarios. Efectuando el procedimiento backstep de SAS sobre el conjunto de residuales, se observa que el rezago 11 si es significativo, pero se elimina

3.1. Análisis exploratorio

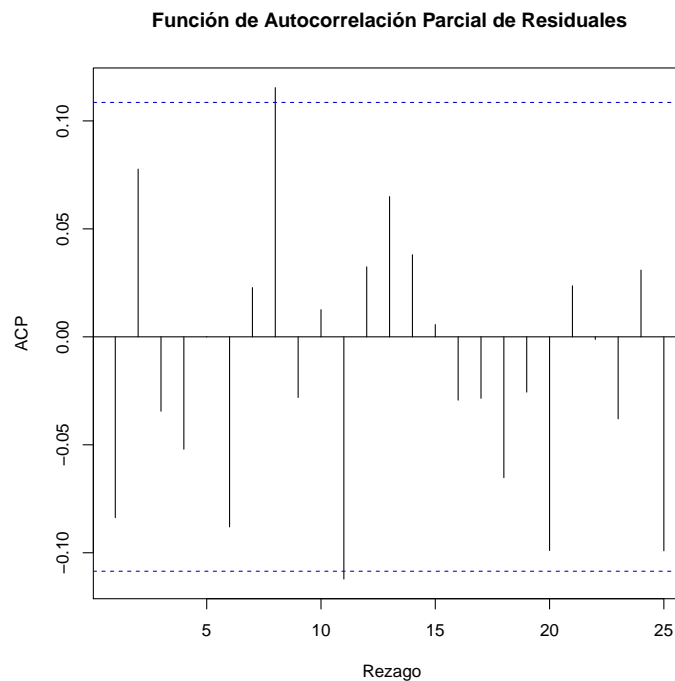


Figura 3.7: Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo autorregresivo de segundo orden, AR(2).

debido a la evidencia empírica antes mencionada que no influyen de manera significativa.

En cuanto a los residuales elevados al cuadrado, no se observan correlaciones más que en el rezago 1 y 7 (figura 3.8). La correlación existente es positiva. La correlaciones decaen lentamente a cero aunque se presentan altibajos en los primeros retardos, esto es debido al agrupamiento de la volatilidad. Esto favorece la hipótesis de heterocedasticidad en la varianza de los rendimientos del VIMEX[®]. Además, en la figura 3.8 se observa que las correlaciones 2 y 3 están cercanas al limite de confianza.

3.1.4. Comentarios finales

Así, del análisis exploratorio se tienen las siguientes conclusiones:

1. La serie de rendimientos semanales del VIMEX[®] no presenta distribución normal. Esto es afirmado dado que la curtosis de la serie es mayor a la que debe tener una distribución normal. Además, los datos presentan asimetría positiva, esto es, se acumulan más observaciones del lado derecho de la media de los datos.
2. De las gráficas de rendimientos y residuos del modelo $AR(2)$, se observan períodos

3.2. Ajuste de Modelos GARCH

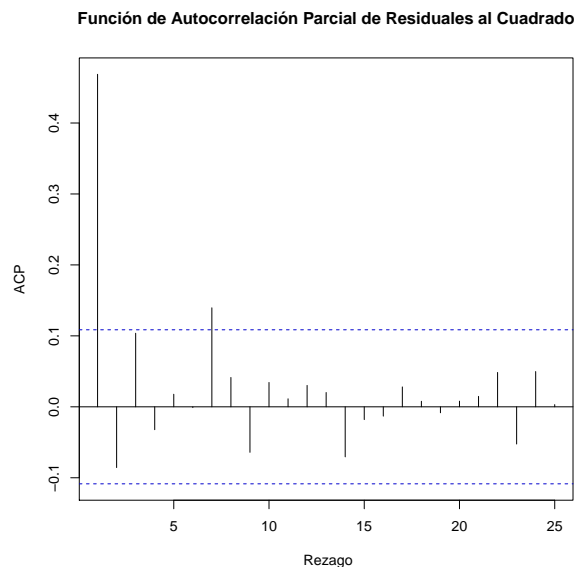


Figura 3.8: Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo $AR(2)$ ajustado elevados al cuadrado.

en los que la volatilidad es menor y períodos donde es mayor. Esto es, existe agrupamiento de la volatilidad. Así mismo, se observan datos atípicos en los grupos generados de altas y bajas de la volatilidad; lo cual es una característica de los modelos GARCH. Además, los residuales elevados al cuadrado presentan correlación, lo cual es importante para la significancia de los parámetros de un modelo GARCH.

Por esto, es factible ajustar un modelo de varianza condicional heterocedástica a la serie de rendimientos del VIMEX[®]; ya que cumple con las hipótesis a las que [Engle \(1982\)](#), [Bollerslev \(1986\)](#) y otros hacen referencia.

3.2. Ajuste de Modelos GARCH

Como se detalló en la sección previa, dadas las características de la serie de rendimientos semanales del VIMEX[®] es factible el uso de la metodología de modelos autorregresivos heterocedásticos para describir la serie. En esta sección se ajustan tales modelos haciendo uso de los resultados anteriores. Esto es, para la media se ajustó un modelo $AR(2)$ y para la varianza modelos $GARCH(0, 1)$ hasta $GARCH(3, 3)$. La estimación se efectuó por el Método de Maxima Verosimilitud conjunta, como sugieren [Francq y Zakoian \(2004\)](#), que prueban propiedades de normalidad asintótica para modelos $ARMA - GARCH$.

3.2. Ajuste de Modelos GARCH

3.2.1. Selección del modelo para la varianza

Para efectuar la selección del modelo que mejor se ajusta a los datos, se lleva a cabo por el criterio de información bayesiano (BIC) y, en segundo lugar, por el criterio de información de Akaike (AIC). La tabla 3.2, muestra tales valores para los modelos propuestos y el modelo obtenido verificando la significancia de los coeficientes. Así, los modelos ARCH son los que mas alto BIC y AIC presentan, dejándolos de lado como posibles opciones de modelo ideal. Los modelos con parte GARCH de orden 3 son los que menores valores de BIC presentan y los de orden 2 y 1 presentan el mismo valor para cada modelo.

Tabla 3.2: Valores de BIC y AIC para los modelos GARCH propuestos.

Modelo	BIC	AIC	Modelo
ARCH(1)	2050	2035	ARCH(1)
ARCH(2)	2054	2035	ARCH(1)
ARCH(3)	2058	2036	ARCH(1)
GARCH(1,1)	2042	2023	GARCH(1,1)
GARCH(1,2)	2042	2023	GARCH(1,1)
GARCH(1,3)	2042	2023	GARCH(1,1)
GARCH(2,1)	2042	2019	GARCH(2,1)
GARCH(2,2)	2042	2019	GARCH(2,1)
GARCH(2,3)	2042	2019	GARCH(2,1)
GARCH(3,1)	2039	2013	ARCH(1)
GARCH(3,2)	2026	2004	GARCH(3,1)
GARCH(3,3)	2026	2004	GARCH(3,1)

De los resultados de estimación, se opta por el modelo GARCH(1,1) (modelo 1) y GARCH(2,1) (modelo 2) por tener los valores de BIC y AIC menores y porque los modelos con parámetro GARCH mayor, se reducen a estos debido a la significancia de los coeficientes. En las tablas 3.3 y 3.4 se presentan los resultados de estimación de los modelos.

Tabla 3.3: Estimación de parámetros del modelo AR(2)-GARCH(1,1), (modelo 1).

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Probabilidad
ϕ_0	-0.0967	0.2122	0.6487
ϕ_2	0.0402	0.0678	0.5532
α_0	4.5617	0.5722	<0.0001
α_1	0.4278	0.0449	<0.0001
β_1	0.5235	0.0387	<0.0001

Para los dos modelos, los parámetros en la ecuación de la media son no significativos. En el modelo 2, estos parámetros presentan mayor evidencia de ser cero que en el modelo 1. A pesar de ello, una vez seleccionado el modelo para la varianza, se verificará el desempeño del modelo incluyendo los parámetros y sin incluirlos.

3.2. Ajuste de Modelos GARCH

En el modelo con perturbaciones GARCH(1,1), los parámetros son significativos a un nivel inferior del 1%. Por otro lado, en el modelo GARCH(2,1), el parámetro correspondiente a la parte ARCH es significativo al 1%; en tanto, los parámetros de la parte GARCH, β_2 es significativo al 5% y el parámetro β_1 no es significativo ni al 10%.

Tabla 3.4: Estimación de parámetros del modelo AR(2)-GARCH(2,1), (modelo2).

Parámetro	Estimación	Error estándar	Probabilidad
ϕ_0	-0.0530	0.2038	0.7947
ϕ_2	0.0330	0.0641	0.6062
α_0	5.3951	0.8730	<0.0001
α_1	0.4970	0.0568	<0.0001
β_1	0.1918	0.1467	0.1913
β_2	0.2430	0.1128	0.0311

Dada la significancia de los parámetros en la ecuación de la varianza, se opta por el modelo GARCH(1,1) para la varianza. Como se había mencionado, se verificarán los desempeños de los modelos considerando los parámetros y sin ellos.

3.2.2. Selección del modelo para la media

Modelo AR(2)-GARCH(1,1)

Para el modelo AR(2)-GARCH(1,1), se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}y_t &= -0.0967 + 0.0402y_{t-2} + e_t \\e_t &= \epsilon_t h_t^{1/2} \\h_t &= 4.5617 + 0.4278e_t^2 + 0.5235h_{t-1}\end{aligned}$$

La suma de los coeficientes del término ARCH y GARCH es 0.9513, cercano a 1, lo que indica persistencia en la volatilidad. Esto es, valores positivos (negativos) tienen repercusiones a mediano plazo. Así mismo, de esta suma se obtiene la varianza no condicional (93.75326), lo que indica que en el largo plazo, el proceso converge a esta varianza.

Con el modelo establecido, el siguiente paso es revisar que tan buen ajuste tiene respecto a los datos. Para ello, se revisarán los residuales de la ecuación de la varianza, ϵ_t .

El supuesto sobre los residuales es que son distribuidos como $WN(0, 1)$. La media de la distribución es cero, lo cual se corrobora con una prueba de t , cuyo valor de p es 0.4696. Así mismo, la desviación estándar es cercana a uno. Así, se corrobora el supuesto

3.2. Ajuste de Modelos GARCH

Tabla 3.5: Medidas descriptivas del modelo AR(2)-GARCH(1,1).

Medida	Valor
Media	0.04065
Mediana	0.00857
Mínimo	-2.90077
Máximo	5.76196
Desviación estándar	1.01389
Desviación media absoluta	0.67368
Curtosis	5.62167
Coficiente de asimetría	1.09359
Jarque-Bera	509.07280

sobre los parámetros de los residuales. La independencia se verifica con la función de autocorrelación parcial, la cual indica que los residuales son independientes, a pesar de que las autocorrelaciones 11 y 20 parecen ser diferentes de cero, pero estas correlaciones son espurias, Figura 3.9.

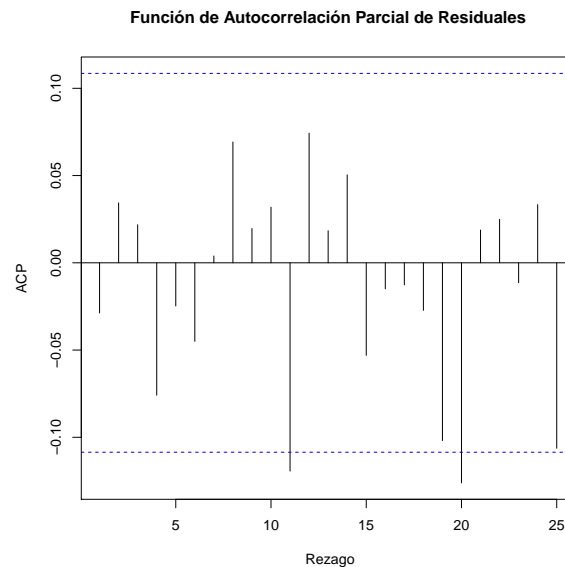


Figura 3.9: Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo AR(2)-GARCH(1,1).

En cuanto a la distribución, en la figura 3.10 la curtosis es mayor a tres (distribución leptocúrtica) y es asimétrica cargada a la derecha. Esto da como resultado un valor muy alto en la prueba de Jarque-Bera y por lo tanto es rechazada y se concluye que la distribución no es normal (Tabla 3.5).

Modelo GARCH(1,1)

Para el modelo GARCH(1,1), las ecuaciones son:

3.2. Ajuste de Modelos GARCH

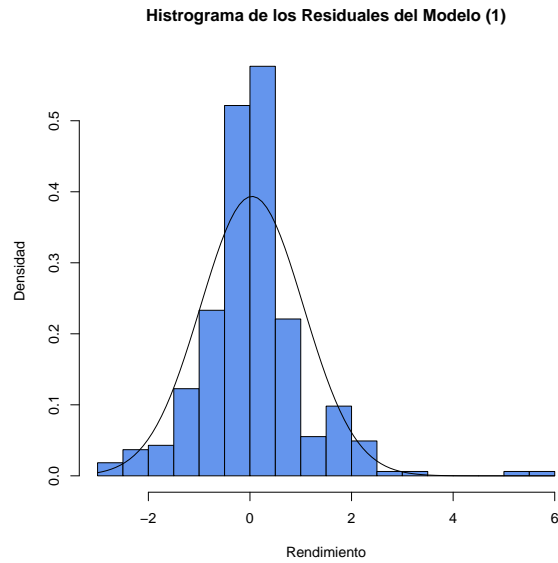


Figura 3.10: Histograma de los residuales del modelo AR(2)-GARCH(1,1).

$$y_t = \epsilon_t h_t^{1/2}$$

$$h_t = 4.7454 + 0.4170e_t^2 + 0.5194h_{t-1}$$

En este modelo se tiene una varianza no condicional de 74.59237, a la cual converge el proceso en el largo plazo. Esta varianza no condicional es menor a la obtenida con el modelo con términos autorregresivos. En cuanto a la persistencia de la volatilidad, los coeficientes suman 0.9364, un valor mas alejado de la unidad, pero suficientemente cercano como para considerar que los shocks de la volatilidad son persistentes en el mediano y largo plazo.

Tabla 3.6: Medidas descriptivas del modelo GARCH(1,1).

Medida	Valor
Media	0.02305
Mediana	-0.01842
Mínimo	-2.89767
Máximo	5.72675
Desviación estándar	1.02082
Desviación media absoluta	0.67703
Curtosis	5.61134
Coficiente de asimetría	1.10219
Jarque-Bera	499.7038

Los supuestos sobre los parámetros de la distribución de lo residuales se cumple, dado

3.3. Modelo final

que se tiene una media estadísticamente igual a cero y varianza unitaria. A pesar de esto, los residuales no tienen distribución normal. Conclusión obtenida de la curtosis y el coeficiente de asimetría, diferentes de 3 y cero de una distribución normal estándar, respectivamente.

Por último, la gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales (figura 3.11) muestra correlación nula en ellos, salvo por los rezagos 11 y 20, pero son tan cercanos al límite de confianza que pueden ser debidos a la muestra. Por lo tanto, se concluye que los residuales son independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza uno, pero no presentan distribución normal, como establece la prueba de Jarque-Bera.

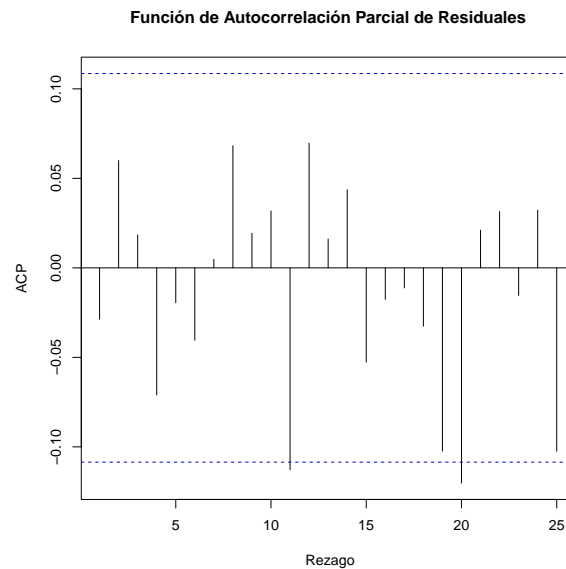


Figura 3.11: Gráfica de la función de autocorrelaciones parciales de los residuales del modelo GARCH(1,2).

3.3. Modelo final

Así, de los modelos propuestos se selecciona el modelo que no presenta parámetros en la ecuación de la media. Para comparar el desempeño de los valores observados contra los ajustados, la figura 3.12 muestra ambas series, observándose buen desempeño del modelo. De manera analítica, como se vió en el análisis de residuales, la desviación media absoluta es menor a la unidad y la varianza es estadísticamente unitaria.

Por lo tanto, el modelo que mejor ajusta a los rendimientos semanales del VIMEX[®], es un GARCH(1,1) asumiendo distribución normal para el ajuste.

3.3. Modelo final

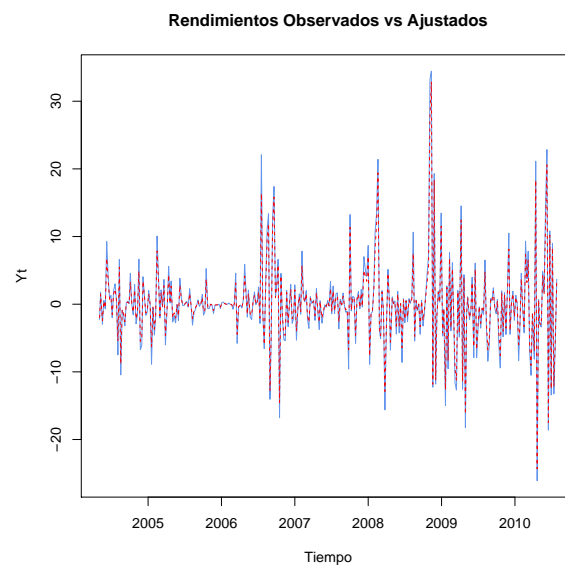


Figura 3.12: Rendimientos observados vs rendimientos ajustados del modelo GARCH(1,1). La línea azul representa las observaciones y la roja los ajustados.

Capítulo 4

Conclusiones y Recomendaciones

4.1. Conclusiones

El Índice de Volatilidad México, VIMEX[®], cumple con las características de las series financieras en relación a la volatilidad. Esto es, hay existencia de clusters, tiene reversión a la media y presenta discontinuidad de saltos, asimetría y exceso de curtosis. Características presentes también en las series de rendimientos logarítmicos diarios y semanales.

La serie de rendimientos logarítmicos diarios presentó ciertas dificultades para ser modelada. Entre ellas, presentó autocorrelaciones significativas muy altas, por ejemplo del orden de rezago 28. Al ajustar modelos para la media y seleccionarlos por el Criterio de Información Bayesiano, BIC, se debían incluir rezagos muy altos (14 o 19), lo cual contradice las hipótesis probadas empíricamente sobre la repercusión de rezagos lejanos en la predicción de la volatilidad actual. Aunado a ello, eliminada la autocorrelación en la media, al ajustar modelos GARCH a la varianza, se detectó pobre ajuste a los datos incluso en modelos de ordenes tales como GARCH(15,15). Una razón plausible para esto es que existen correlaciones sobre rezagos mayores; se observan rezagos del orden 500, incluso, significativos. Esto puede ser consecuencia del volumen operado de las opciones sobre el IPC^{®1} y a que los precios tomados para calcular el VIMEX[®] no están estrictamente *at the money*.

Al convertir los rendimientos diarios a semanales, la serie se vuelve mas estable y las autocorrelaciones para rezagos mayores dejan de ser significativas. Aunque se conservan las propiedades que caracterizan a la volatilidad; por lo cual, el uso de modelos GARCH fue adecuado para el estudio de la serie.

A pesar de requerir el ajuste de un modelo AR(2) para la media, al ajustar el modelo

¹No olvidar que el VIMEX[®] se calcula sobre las opciones operadas sobre el IPC²@ en MexDer.

4.2. Recomendaciones

GARCH, éste último absorbe la autocorrelación presente en la serie de rendimientos semanales, lo que ocasiona que los coeficientes de la ecuación para la media sean no significativos.

El orden del modelo GARCH seleccionado es acorde a lo encontrado en la literatura. En general, los modelos más usados son GARCH(1,1) hasta GARCH(2,2). El IPC[®] no escapa a esto, ya que se han ajustado modelos GARCH(1,1) a este indicador por [López-Herrera \(2004\)](#) y [Ludlow y Mota \(2006\)](#).

En relación a la persistencia de la volatilidad, [López-Herrera \(2004\)](#) reporta para el IPC[®] un valor de 0.950972 en su modelo GARCH(1,1) de ajustes preeliminares, resultado de obtener $\alpha_1 = 0.177315$ y $\beta_1 = 0.773657$. En su modelo GARCH definitivo, $\alpha_1 + \beta_1 = 0.949519$. En su modelo TARARCH, el efecto de la persistencia es 0.946615. Resultados muy parecidos en ambos modelos. Mientras que la persistencia de la volatilidad para el VIMEX[®] es 0.9353 con el modelo GARCH(1,1). Esta persistencia estimada no está alejada de la obtenida para el IPC[®]. Aunado a ello, es menor debido a que el modelo para el VIMEX[®] usa rendimientos semanales y no diarios, como el IPC[®]. A pesar de esto, existe persistencia en la volatilidad y es considerable para los rendimientos semanales.

A pesar que la persistencia no presenta muchas diferencias, aunque sí existen en cuanto a la volatilidad condicional. Para los modelos estimados del IPC[®] está alrededor de 1.8 unidades de rendimiento. En cambio, para el VIMEX[®], la volatilidad condicional es 8.6379, nuevamente, la causa principal de tan alta volatilidad puede ser el volumen de opciones operadas.

En cuanto a los residuales del modelo, se concluye que cumplen los supuestos sobre el primer y segundo momentos y la no autocorrelación, no así en cuanto a la distribución, pues se descarta totalmente la normalidad debido a los altos valores obtenidos en curtosis y asimetría. Este último, presenta un aumento respecto al que se obtuvo en los rendimientos semanales, en lugar de disminuir. En este sentido, el efecto apalancamiento es bien absorbido por el modelo GARCH ajustado. Por lo tanto, el ajuste del modelo a los datos es adecuado.

4.2. Recomendaciones

Se concluyó que el modelo ajustado con distribución normal no arroja residuales con tal distribución, por tal motivo es recomendable repetir el ajuste con distribuciones de colas pesadas, tales como la t de Student o la GED. Además, se concluyó que los residuales no son simétricos, por tanto efectuar el ajuste con modelos asimétricos es una opción obligada en la búsqueda de un mejor modelo. Sin embargo, debe tenerse cuidado, ya que respecto al efecto apalancamiento, los shocks positivos son los que no son absorbidos de manera adecuada por el modelo simétrico.

Referencias

- Bahí, C. A. (2007). Modelos de medición de la volatilidad en los mercados de valores: Aplicación al mercado bursátil argentino. *Inf. téc.*, Universidad Nacional del Cuyo.
- Baillie, R. T. y Bollerslev, T. (1989). The Message in Daily Exchange Rates: A Conditional-Variance Tale. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7, 3, 297–305. Citado por (Peters, 2001).
- Baillie, R. T., Bollerslev, T. y Mikkelsen, H. O. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74, 1, 3–30. Citado por (Casas y Cepeda, 2008).
- Beine, M., Laurent, S. y Lecourt, C. (2002). Accounting for conditional leptokurtosis and closing days effects in FIGARCH models of daily exchange rates. , 2013/10443. Citado por (Peters, 2001).
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81, 3, pp. 637–654. ISSN 00223808.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 3, 307–327.
- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, 69, 3, 542–47. Citado por (Peters, 2001).
- Bollerslev, T., Engle, R. F. y Wooldridge, J. M. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. *Journal of Political Economy*, 96, 1, 116–31. Citado por (Ling y McAleer, 2001).
- Brenner, M. y Galai, D. (1989). New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility. *Financial Analysts Journal*, Vol. 45, 4, pp. 6165. Citado por (Rubio y Marrero, 2004).
- Casas, M. y Cepeda, E. (2008). Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: Aplicaciones a Series Financieras. *Cuadernos de Economía*, XXVII, 48, pp. 287–319.
- Chou, R. Y. (1988). Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using Garch. *Journal of Applied Econometrics*, 3, 4, 279–94. Citado por (Casas y Cepeda, 2008).

Referencias

- Cox, J. C. y Rubinstein, M. (1985). *Options Markets*. Prentice-Hall. Citado por ([Rubio y Marrero, 2004](#)).
- De Arce, R. (2004). 20 Años de Modelos ARCH: Una Visión de Conjunto de las Distintas Variantes de la Familia. *Estudios de Economía Aplicada*, 22, 001, pp. 1–27.
- Engel, C. y Rodrigues, A. P. (1987). Tests of international capm with time-varying covariances. NBER Working Papers 2303, National Bureau of Economic Research, Inc. Citado por ([Ling y McAleer, 2001](#)).
- Engle, R. y Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5, 1, 1–50. Citado por ([De Arce, 2004](#)).
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 4, 987–1007.
- Engle, R. F., Granger, C. W. J. y Kraft, D. (1984). Combining competing forecasts of inflation using a bivariate arch model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8, 2, 151–165. Citado por ([Ling y McAleer, 2001](#)).
- Fleming, J., Ostdiek, B. y Whaley, R. E. (1995). Predicting stock market volatility: A new measure. *Journal of Futures Markets*, 15, 3, 265–302. ISSN 1096-9934.
- Francq, C. y Zakoian, J. M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, 10, 4, pp. 605–637.
- Gastineau, G. L. (1977). An Index of Listed Option Premiums. *Financial Analysts Journal*, 33, 3, pp. 70–75. Citado por ([Rubio y Marrero, 2004](#)).
- González, A. (2008). Análisis empírico de la volatilidad estocástica y saltos para modelos en tiempo continuo de índices bursátiles utilizando el emm. Inf. téc., Universidad del País Vasco.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6, 2, pp. 327–343. ISSN 08939454.
- Ito, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20, 8, pp. 519–524.
- Jarque, C. M. y Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters*, 6, 3, 255–259.
- Jorion, P. (2008). *Valor en Riesgo: El Nuevo Paradigma Para el Control de Riesgos con Derivados*. Limusa, México, DF.
- Kaiser, T. (1996). One-factor-garch models for german stocks - estimation and forecasting -. *Econometrics* 9612007, EconWPA. Citado por ([Peters, 2001](#)).
- Lamothe, P. (2003). *Opciones Financieras y Productos Estructurados*. McGraw-Hill, segunda edición.

Referencias

- Ling, S. y Deng, W. (1993). Parametric estimate of multivariate autoregressive models with conditional hetero covariance matrix errors. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 16, pp. 517–533. (in Chinese). Citado por (Ling y McAleer, 2001).
- Ling, S. y Li, W. K. (1997). On Fractionally Integrated Autoregressive Moving-Average Time Series Models With Conditional Heteroscedasticity. *Journal of the American Statistical Association*, 92, 439, pp. 1184–1194.
- Ling, S. y McAleer, M. (2001). Asymptotic Theory for a Vector ARMA-GARCH Model. , 0549.
- López-Herrera, F. (2004). Modelado de Volatilidad y Pronósticos del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *Facultad de Contaduría y Administración*, , 213, pp. 43–72.
- Ludlow, J. y Mota, B. (2006). Volatilidad del IPC, Nasdaq y S&P500: un Modelo GARCH Multivariado. *Análisis Económico*, XXI, 048, pp. 215–227.
- Margalef-Roig y Miret-Artés, S. (2000). Cálculo estocástico aplicado a las fianzas: Precio de las opciones según el modelo black-scholes-merton y algunas generalizaciones.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7, 1, pp. 77–91. ISSN 00221082.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59, 2, 347–70.
- Novalés, A. y Gracia-Diez, M. (1993). Guía para la estimación de modelos ARCH. *Estadística Española*, 35, pp. 5–38.
- Pantula, S. G. (1988). Estimation of Autoregressive Models with Arch Errors. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 50, 1, pp. 119–138. Citado por (Ling y Li, 1997).
- Peters, J.-P. (2001). Estimating and Forecasting Volatility of Stock Indices Using Asymmetric GARCH Models and (Skewed) Student-t Densities. *Ecole de Administration de Affaires*.
- Rubio, J. G. y Marrero, S. M. (2004). El índice vix para la predicción de la volatilidad: un estudio internacional. Documentos de trabajo conjunto ULL-ULPGC 2004-10, Facultad de Ciencias Económicas de la ULPGC.
- Schwert, G. W. (1989). Why Does Stock Market Volatility Change over Time? *Journal of Finance*, 44, 5, 1115–53. Citado por (Casas y Cepeda, 2008).
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19, 3, pp. 425–442. ISSN 00221082. Citado por (Tamayo-Medina y Rodríguez-Pinzón, 2010).
- Tamayo-Medina, R. y Rodríguez-Pinzón, H. Y. (2010). Una Revisión de los Modelos de Volatilidad Estocástica. *Comunicaciones en Estadística*, 3, 1, pp. 79–98.
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, 25, 2, pp. 65–86. ISSN 00346527. Citado por (Tamayo-Medina y Rodríguez-Pinzón, 2010).

Referencias

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. JOHN WILEY & SONS, INC., Hoboken, New Jersey, tercera edición.

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos Financieros y Económicos*. Cengage Learning Editores, México, DF.

Anexos

Anexo A: Cálculo del VIMEX[®]

El calculo se divide en tres etapas:

1. Calcula la media simple de las volatilidades implícitas de los pares de opciones *call* y *put* que estén por arriba y por abajo del precio *at the money* teórico. Así, en esta primera etapa se obtiene cuatro subíndices.

Sea $\sigma_{i,j,k}$ la volatilidad implícita donde:

$$i = \begin{cases} C \rightarrow Call \\ P \rightarrow Put \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{Vencimiento más cercano} \\ 2 \rightarrow \text{Vencimiento siguiente al más cercano} \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} A \rightarrow \text{Arriba } (k > S) \\ B \rightarrow \text{Abajo } (k < S) \end{cases}$$

Con esto, se promedian las volatilidades implícitas de los pares de opciones para el vencimiento más cercano:

$$\sigma_{1,a} = (\sigma_{c,1,a} + \sigma_{p,1,a}) / 2 \quad \sigma_{1,b} = (\sigma_{c,1,b} + \sigma_{c,1,b}) / 2$$

Y para el vencimiento siguiente más cercano:

$$\sigma_{2,a} = (\sigma_{c,2,a} + \sigma_{p,2,a}) / 2 \quad \sigma_{2,b} = (\sigma_{c,2,b} + \sigma_{c,2,b}) / 2$$

2. El segundo paso es calcular la volatilidad implícita del precio de ejercicio *at the money* interpolando las volatilidades implícitas del paso anterior con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{1,a} \left(\frac{S-K_b}{K_a-K_b} \right) + \sigma_{1,b} \left(\frac{K_a-S}{K_a-K_b} \right) \\ \sigma_2 &= \sigma_{2,a} \left(\frac{S-K_b}{K_a-K_b} \right) + \sigma_{2,b} \left(\frac{K_a-S}{K_a-K_b} \right)\end{aligned}$$

en donde:

K_a : precio de ejercicio que se encuentra por arriba del nivel del índice al cierre del mercado. En este caso no importa si el valor es muy grande o muy bajo, siempre se tomará el precio listado en MexDer que en ese momento se encuentre arriba. Finalmente, se trata de una interpretación, cuyo objetivo es encontrar el precio *at the money* que coincida con el precio de cierre del IPC[®].

k_b : precio de ejercicio que se encuentra por abajo en el momento del cálculo.

S : nivel de cierre del IPC[®] en el Mercado de Capitales.

- Finalmente, se debe mantener un período constante para el VIMEX[®]. Las volatilidades del vencimiento más cercano y el siguiente más cercano son ponderadas para crear un período constante aproximadamente de 22 días hábiles o días de negociación por cada mes que contengan las series listadas en MexDer. En este caso son 66 días, dado que son vencimientos trimestrales. Para tal efecto, se tiene la siguiente fórmula:

$$VIMEX = \sigma_1 \left(\frac{T_2-66}{T_2-T_1} \right) + \sigma_2 \left(\frac{66-T_1}{T_2-T_1} \right)$$

T_1 : Días de operación restantes del vencimiento de la Opción más cercana a la fecha de cálculo del VIMEX[®].

T_2 : Días de operación restantes del segundo vencimiento de la opción (siguiente más cercano) a la fecha del cálculo del VIMEX[®].