



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN
EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

**Pruebas para la distribución Gaussiana
Inversa basadas en transformaciones**

Adrián Ochoa Sánchez

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO

2015

La presente tesis titulada: **Pruebas para la distribución Gaussiana Inversa basadas en transformaciones**, realizada por el alumno: **Adrián Ochoa Sánchez**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

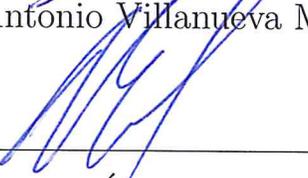
SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA ESTADÍSTICA

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO Elizabeth Gonzalez E.
Dra. Elizabeth González Estrada

ASESOR 
Dr. José A. Villaseñor Alva

ASESOR 
Dr. Antonio Villanueva Morales

ASESOR 
Dr. Miguel Ángel Martínez Damian

Montecillo, Texcoco, México, Diciembre de 2015.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado para la realización de mis estudios de Maestría en Ciencias.

Al Colegio de Postgraduados, por la oportunidad que me brindó.

Al Consejo particular integrado por

- Dra. Elizabeth González Estrada.
- Dr. José A. Villaseñor Alva
- Dr. Antonio Villanueva Morales
- Dr. Miguel Ángel Martínez Damian

por el apoyo recibido y el tiempo dedicado a esta tesis.

Para VANIA.

Resumen

En este trabajo se proponen tres procedimientos para probar bondad de ajuste de la distribución Gaussiana Inversa cuando sus parámetros son desconocidos. Las observaciones se transforman de tal manera que el problema se traduce en probar ya sea que se tiene una muestra aleatoria de la distribución Gamma con parámetro de forma 0.5 o que se tiene una muestra aleatoria de la distribución normal. Se presentan resultados de un estudio de simulación Monte Carlo en donde se verifica que estos procedimientos preservan el tamaño de la prueba y muestran buenas propiedades de potencia contra las distribuciones alternativas Weibull, Gamma y Log–Normal, las cuales también son usadas para modelar datos con asimetría positiva.

Palabras claves: Potencia de la prueba, prueba de Anderson–Darling, prueba de Shapiro–Wilk, distribución Gaussiana Inversa, simulación Monte Carlo.

Abstract

This manuscript proposes three methods for testing goodness of fit of the Inverse Gaussian distribution when its parameters are unknown. Observations are transformed to either gamma with shape parameter 0.5 or normal random variables. Then Anderson–Darling and Shapiro–Wilk tests are used for testing the gamma and normal assumptions. Monte Carlo simulation results indicate that these procedures preserve the nominal test size and have good power properties against Weibull, Gamma and Log–Normal distributions, which are also used for modeling data with positive skewness.

Key words: Test power, Anderson–Darling test, Shapiro–Wilk test, Inverse Gaussian distribution, Monte Carlo simulation.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
2. Antecedentes	3
3. Marco Teórico	6
3.1. Propiedades de la Distribución IG	6
3.1.1. Función Característica y de Momentos	8
3.1.2. Distribución IG con tres Parámetros	8
3.1.3. Estimadores de Máxima Verosimilitud	9
3.1.4. Funciones de Confiabilidad y Tasa de Falla	10
3.2. Pruebas de Hipótesis	10
4. Pruebas propuestas	14
4.1. Pruebas basadas en transformaciones Gamma	14
4.1.1. Prueba de Anderson–Darling	15

ÍNDICE

4.1.2. Prueba T	16
4.2. Prueba basada en una transformación a normalidad	19
4.2.1. Prueba de Shapiro–Wilk	20
5. Estudio del tamaño y potencia de las pruebas	22
5.1. Tamaño de las Pruebas	23
5.2. Potencia de las Pruebas	27
5.2.1. Distribución Log-normal	28
5.2.2. Distribución Gamma	28
5.2.3. Distribución Weibull	29
5.3. Discusión de resultados	36
6. Conclusiones	38
Referencias	38
A. Aspectos computacionales	41
B. Demostración de la transformación a normalidad	58
C. Tablas de tamaños y potencias	60

Índice de tablas

4.1. Tabla de constantes críticas para la prueba Anderson–Darling basada en transformaciones Gamma.	16
4.2. Tabla de constantes críticas para la prueba T (dos colas) basada en transformaciones Gamma.	19
5.1. Tamaños estimados de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z , correspondientes a $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	25
C.1. Tamaños estimados para las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z , correspondientes a $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	61
C.2. Tamaños estimados para las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z , correspondientes a $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	62
C.3. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	63
C.4. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	64
C.5. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	65
C.6. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	66

ÍNDICE DE TABLAS

C.7. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	67
C.8. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	68
C.9. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	69
C.10. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	70
C.11. Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	71

Índice de figuras

3.1. Densidad Gaussiana Inversa con $\mu = 1$ y variando λ	7
3.2. Densidad Gaussiana Inversa con $\lambda = 1$ y variando μ	7
5.1. Tamaño estimado de las pruebas bajo la distribución $IG(1, \phi)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	26
5.2. Tamaño estimado de las pruebas bajo la distribución $IG(1, \phi)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	26
5.3. Tamaño estimado de las pruebas bajo la distribución $IG(1, \phi)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	27
5.4. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	30
5.5. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	31
5.6. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	31
5.7. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	32
5.8. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	33

ÍNDICE DE FIGURAS

5.9. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	33
5.10. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$	34
5.11. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$	35
5.12. Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$	35

Capítulo 1

Introducción

La distribución Gaussiana Inversa (*IG*) se usa para modelar datos positivos con asimetría positiva en las áreas de supervivencia, confiabilidad, finanzas, etc. En el análisis de confiabilidad y pruebas de vida, la distribución *IG* es preferible sobre las distribuciones Gamma y Weibull para modelar el tiempo de falla en procesos que experimentan fatiga durante un período largo de tiempo reciben un gran número de cargas dinámicas y entonces muestran una tasa de falla decreciente a medida que el proceso llega a un umbral (punto de rotura) en el tiempo. Esto es justificado por la propiedad de que su tasa de falla aumenta hasta un valor máximo y luego decrece hacia un valor asintótico distinto de cero.

La distribución *IG* es muy similar a la distribución Log-normal, pero la tasa de fracaso de esta última disminuye con el tiempo a cero, una propiedad que no es realista en muchas aplicaciones. Además, existen ventajas en el uso de la distribución *IG* sobre otros modelos positivamente sesgados ya que su teoría de muestreo está bien desarrollada y tiene resultados análogos a algunos de la teoría de muestreo normal. Una amplia cobertura de las propiedades, la inferencia y aplicaciones de la *IG* se proporciona en las monografías de [Chhikara y Folks \(1989\)](#).

La forma estándar de la distribución Gaussiana Inversa con dos parámetros es:

$$f_X(x; \mu, \lambda) = \left[\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\mu^2 x} (x - \mu)^2 \right\}; \quad x > 0, \mu > 0, \lambda > 0.$$

1.1. Objetivos

Denotamos a esta distribución por $IG(\mu, \lambda)$. La función de distribución acumulada es:

$$F_X(x; \mu, \lambda) = \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} - 1 \right) \right\} + \exp \left\{ \frac{2\lambda}{\mu} \right\} \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} + 1 \right) \right\},$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar.

Esta densidad es unimodal con media μ y varianza $\frac{\mu^3}{\lambda}$. Los coeficientes de asimetría y curtosis están denotados por $\sqrt{\beta_1} = 3\sqrt{\mu/\lambda}$ y $\beta_2 = 15\mu/\lambda + 3$, respectivamente.

El problema de probar bondad de ajuste de la distribución IG con parámetros desconocidos se presenta con la misma dificultad encontrada en las familias que no son del tipo de localización-escala. Es decir, la distribución de la estadística de prueba bajo la hipótesis nula típicamente depende del verdadero valor de los parámetros de forma desconocidos, además depende de la familia bajo prueba, del método de estimación y del tamaño de la muestra.

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una población con función de distribución definida en el conjunto de números reales positivos. En este trabajo se aborda el problema de probar la hipótesis compuesta:

$$H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \sim IG(\mu, \lambda) \quad vs \quad H_1 : X_1, X_2, \dots, X_n \approx IG(\mu, \lambda), \quad (1.1)$$

donde μ y λ son desconocidos. La notación " \sim " se lee como "tiene distribución".

1.1. Objetivos

- Proponer pruebas para la hipótesis de que una muestra aleatoria tiene distribución Gaussiana Inversa con parámetros desconocidos.
- Estudiar el tamaño y la potencia de las pruebas propuestas mediante simulación Monte Carlo.

Capítulo 2

Antecedentes

Varias pruebas de bondad de ajuste para explorar la conveniencia de la distribución IG están disponibles en la literatura. Las pruebas se pueden clasificar en tres grandes grupos.

Pruebas basadas en la función de distribución empírica

La estadística de prueba de esta clase se basa en la función de distribución empírica (*fde*) generada a partir de la muestra observada para estimar la verdadera pero desconocida función de distribución mediante la utilización y ordenación de las observaciones involucradas y estimadores de los parámetros, por lo general son los estimadores de máxima verosimilitud. Las pruebas más populares de esta categoría son las pruebas de Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson–Darling (AD), Cramer von Mises (CM) y Watson (WA).

Para probar el ajuste de la distribución IG , [Edgeman et al. \(1988\)](#) desarrollaron una modificación de la prueba KS en donde dada X_1, \dots, X_n , una muestra aleatoria, los parámetros de la densidad son estimados de los datos. Si X es escalada de acuerdo a X/μ entonces la variable resultante se distribuye IG con media unitaria y varianza igual a μ/λ , esto es $X/\mu \sim IG(1, \phi)$. Reescalando de esta manera se restringe la atención a la densidad IG con media unitaria y la búsqueda de una prueba de ajuste. Entonces μ es desconocida y es estimada de los datos, el escalamiento que se desea usar esta dado por $X/\hat{\mu} = X/\bar{X}$, donde la distribución de $(X_1/\bar{X}, X_2/\bar{X}, \dots, X_n/\bar{X})$ depende solamente de ϕ . Con este rescalamiento se tiene a Y_1, \dots, Y_n , las cuales son

2. Antecedentes

las estadísticas de orden. En consecuencia se tiene la prueba $H_0 : Y_i \sim IG(1, \phi)$, con ϕ desconocido. En la estadística de prueba de *KS* se tiene la *fda* teórica de Y_i con μ reemplazada por la unidad y λ reemplazada por $\hat{\phi} = \widehat{(\lambda/\mu)}$, donde

$$\hat{\phi} = \left(\frac{\tilde{X}}{\bar{X}} - 1 \right)^{-1} = \frac{\tilde{X}}{\bar{X} - \tilde{X}},$$

donde \tilde{X} es la media armónica de las observaciones. Si el valor observado de la estadística de prueba excede el correspondiente al valor crítico de ésta con un nivel de significancia α , entonces la hipótesis $H_0 : Y_i \sim IG(1, \phi)$ es rechazada.

[Pavur et al. \(1992\)](#) desarrollaron una modificación de las pruebas *AD*, *CM* y *WA* donde se realiza una prueba de bondad de ajuste para la distribución *IG* con parámetros desconocidos. Al igual que [Edgeman et al. \(1988\)](#), la prueba se reduce a probar $H_0 : X_i \sim IG(1, \phi)$, donde $\phi = \lambda/\mu$. Las pruebas *AD*, *CM* y *WA* están basadas en la función de distribución empírica \hat{F}_x de la distribución *IG*, donde μ y λ son sustituidos por sus estimadores de máxima verosimilitud. La regla de decisión en todos los casos es: si el valor calculado de la estadística de prueba excede el valor tabulado de dichas estadísticas con nivel de significancia designado α , entonces la distribución hipotetizada es rechazada como un modelo para el fenómeno. En estos trabajos las constantes críticas se obtienen de tablas indexadas por el valor del parámetro de forma $\phi = \lambda/\mu$ y el tamaño de la muestra n .

[Gunes et al. \(1997\)](#) también desarrollaron pruebas modificando la *fde*. Los parámetros μ y λ son sustituidos por sus estimadores de máxima verosimilitud. Las distribuciones nulas de sus estadísticas también dependen de ϕ .

Por otra parte, [O'Reilly y Rueda \(1992\)](#) propusieron dos procedimientos para calcular la estadística de prueba *AD*. En el primero usan los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros y en el segundo usan el estimador Rao-Blackwell de la función de distribución de la *IG*. Los autores muestran que ambos procedimientos proporcionan la misma distribución asintótica nula. Usando simulación, encontraron puntos críticos aproximados de la distribución nula asintótica de la estadística de prueba *AD*.

Pruebas basadas en caracterizaciones

Un segundo grupo consiste en pruebas que se basan en caracterizaciones específicas de

2. Antecedentes

la clase de distribuciones Gaussianas Inversas, las cuales son análogas a las caracterizaciones de la familia de distribuciones Gaussianas. A este grupo pertenecen la prueba de independencia de [Mudholkar *et al.* \(2001\)](#), la prueba de entropía de [Mudholkar y Tian \(2002\)](#) y la prueba de momentos de [Natarajan y Mudholkar \(2004\)](#).

La primera prueba está basada en la propiedad de la independencia de los estimadores de máxima verosimilitud de μ y λ . Se conoce como la prueba de Z porque la estadística de prueba es una versión estandarizada de la transformación Z de Fisher de un apropiado coeficiente de correlación. La segunda prueba se basa en una caracterización de entropía máxima de la variable aleatoria $Y = 1/\sqrt{X}$, cuando X tiene la distribución IG , y en una prueba de entropía análoga a la desarrollada por [Vasicek \(1976\)](#) para la distribución normal.

Con relación a la tercera prueba, [Natarajan y Mudholkar \(2004\)](#) describen las analogías de los modelos Gaussianos con los modelos Gaussianos Inversos. Los autores presentaron dos funciones de momentos (δ_1, δ_2) , que denominan los coeficientes de asimetría y curtosis de la distribución IG . También discutieron el paralelismo de estas funciones con los coeficientes clásicos de asimetría y curtosis, que tienen amplias aplicaciones de bondad de ajuste. En este artículo se consideran las versiones muestrales de estas funciones para la construcción de pruebas de bondad de ajuste para los modelos IG . Se proponen las estadísticas de prueba y sus distribuciones asintóticas normales y Chi-cuadrada son derivadas. Simulaciones de Monte Carlo se utilizan para refinar las distribuciones asintóticas y estudiar las características de funcionamiento de las pruebas.

Pruebas basadas en la transformada de Laplace

[Henze y Klar \(2002\)](#) propusieron pruebas basadas en la transformada de Laplace empírica. Debido a que las distribuciones nulas de sus estadísticas dependen de los valores desconocidos de los parámetros, estas pruebas se basan en bootstrap paramétrico para aproximar las constantes críticas.

Estos autores compararon sus pruebas con las pruebas basadas en la *fde* usando bootstrap paramétrico.

Capítulo 3

Marco Teórico

La noción de movimiento Browniano es aplicada para describir procesos inherentes de muchos fenómenos, particularmente en las ciencias naturales y física. Ya que el primer tiempo de paso del movimiento Browniano se distribuye como una variable Gaussiana Inversa, es lógico usarlo como un modelo de tiempo de vida. La función de tasa de falla de la distribución Gaussiana Inversa muestra ser no monótona, donde primero incrementa y después decrece, se acerca a un valor constante conforme pasa el tiempo de vida tiende a infinito. Esta propiedad es a menudo encontrada en casos de tiempos de vida dominados por ocurrencias prematuras de un evento.

3.1. Propiedades de la Distribución IG

Las siguientes propiedades se extrajeron del libro de [Chhikara y Folks \(1989\)](#).

La forma de la distribución depende de $\phi = \lambda/\mu$ solamente; entonces ϕ es el parámetro de forma. La función de densidad Gaussiana Inversa representa una amplia clase de distribuciones, que van de una distribución muy sesgada a una distribución simétrica cuando ϕ varía de 0 a ∞ . Las curvas de densidad que muestran las Figuras 3.1 y 3.2 ilustran esta propiedad.

3.1. Propiedades de la Distribución *IG*

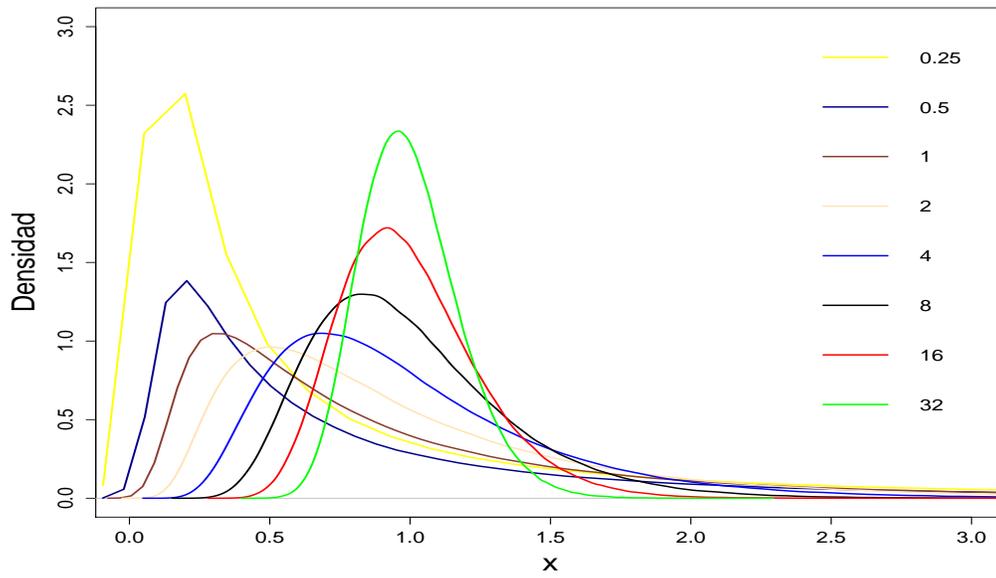


Figura 3.1: Densidad Gaussiana Inversa con $\mu = 1$ y variando λ .

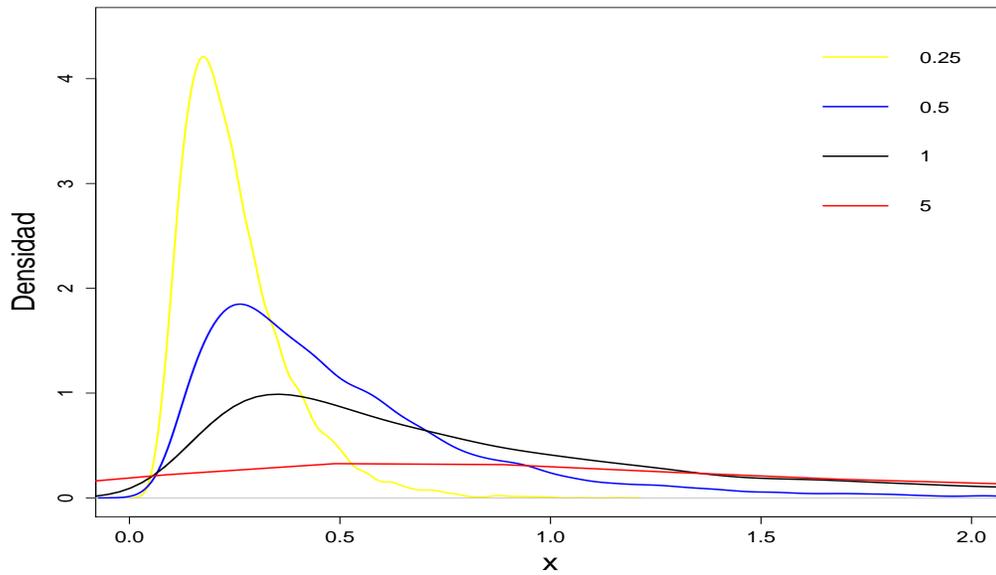


Figura 3.2: Densidad Gaussiana Inversa con $\lambda = 1$ y variando μ .

Estas curvas son obtenidas especificando $\mu = 1$ y variando λ en la Figura 3.1 y especificando $\lambda = 1$ y variando μ en la Figura 3.2 .

3.1. Propiedades de la Distribución IG

3.1.1. Función Característica y de Momentos

La función característica de $X \sim IG(\mu, \lambda)$, denotada por $C_X(t)$, está dada por:

$$C_X(t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{2i\mu^2 t}{\lambda} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Todos los momentos positivos y negativos existen. Los momentos positivos pueden ser obtenidos por diferenciación de $C_X(t)$ y los momentos negativos por integración de ésta. Tomando la r -ésima derivada de $C_X(t)$ y evaluando en $t = 0$, se tiene

$$E[X^r] = \mu^r \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r-1+s)!}{s!(r-1-s)!} \left(2\frac{\lambda}{\mu} \right)^{-s}. \quad (3.2)$$

Los primeros cuatro momentos centrados en cero son:

$$\begin{aligned} & \mu, \\ & \mu^2 + \frac{\mu^3}{\lambda}, \\ & \mu^3 + 3\frac{\mu^4}{\lambda} + 3\frac{\mu^5}{\lambda^2}, \\ & y \quad \mu^4 + 6\frac{\mu^5}{\lambda} + 15\frac{\mu^6}{\lambda^2} + 15\frac{\mu^7}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

Los momentos negativos están en función de la distribución de X^{-1} . Podemos, sin embargo, señalar que hay una muy simple relación entre momentos positivos y negativos dada por:

$$E[X^{-r}] = \frac{E[X^{r+1}]}{\mu^{2r+1}}. \quad (3.3)$$

3.1.2. Distribución IG con tres Parámetros

La falta de la propiedad de invarianza bajo el cambio de localización hace que sea deseable introducir un parámetro de umbral adicional para la familia de las distri-

3.1. Propiedades de la Distribución IG

buciones Gaussiana Inversa. Si hay un valor de umbral θ , un tercer parámetro de la distribución Gaussiana Inversa puede ser definido asumiendo que $(X - \theta) \sim IG(\mu, \lambda)$, y que la función de densidad de X está dada por

$$f_X(x; \theta, \mu, \lambda) = \left[\frac{\lambda}{2\pi(x - \theta)^3} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda [(x - \theta) - \mu]^2}{2\mu^2(x - \theta)} \right\}; \quad \theta \in \mathbb{R}, \mu > 0, \lambda > 0, x > \theta. \quad (3.4)$$

Para (3.4), $E[X] = \theta + \mu$, pero $\lambda/\mu = \phi$ es un parámetro de forma como en el caso de la distribución Gaussiana Inversa con dos parámetros. La distribución dada por la *fdp* en (3.4) proporciona una alternativa para las distribuciones Weibull, Gamma, Log-normal, y otras distribuciones sesgadas.

3.1.3. Estimadores de Máxima Verosimilitud

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de la distribución $IG(\mu, \lambda)$. Entonces el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de μ es:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim IG(\mu, n\lambda).$$

El estimador de máxima verosimilitud del parámetro $1/\lambda$ es:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{-1} - \bar{X}^{-1}) \sim (n\lambda)^{-1} \times \chi_{n-1}^2,$$

donde χ_{n-1}^2 denota la distribución Chi-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.

Los estimadores insesgados de varianza uniformemente mínima (UMVUE) de μ y de $1/\lambda$ son \bar{X} y $\sum_{i=1}^n (X_i^{-1} - \bar{X}^{-1}) / (n - 1)$, respectivamente.

3.2. Pruebas de Hipótesis

3.1.4. Funciones de Confiabilidad y Tasa de Falla

La función de confiabilidad está dada por

$$R(x) = 1 - F(x) = \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(1 - \frac{x}{\mu} \right) \right\} + \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(1 + \frac{x}{\mu} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{2\lambda}{\mu} \right\}.$$

y la función de tasa de fracaso (falla):

$$r(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{\left[\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\mu^2 x} (x - \mu)^2 \right\}}{\Phi \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(1 - \frac{x}{\mu} \right) \right\} + \Phi \left\{ -\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(1 + \frac{x}{\mu} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{2\lambda}{\mu} \right\}}.$$

La distribución *IG* ofrece ciertas ventajas sobre el modelo Log-normal. En primer lugar, la tasa de fracaso de la distribución Gaussiana inversa $r(x)$ es distinta de cero y constante cuando $x \rightarrow \infty$, mientras que $r(x)$ se aproxima a cero para la distribución Log-normal. El hecho de que la tasa de fracaso de la distribución *IG* sea asintóticamente constante implica que la aparición de un fallo eventualmente se convierte en un evento puramente aleatorio e independiente de la vida pasada (sin memoria).

En contraste, el hecho que la tasa de fracaso de la distribución Log-normal sea asintóticamente cero implica que, finalmente, casi no hay posibilidad de fallos remanentes, lo cual no es razonable para la mayoría de los sistemas reales. Además, el modelo *IG* puede capturar una amplia gama de comportamientos en todo el tiempo de vida. La distribución *IG* incrementa su tasa de falla cuando está ligeramente sesgada, y por lo tanto también es aplicable cuando la vida del sistema no está dominado por fallos prematuros.

3.2. Pruebas de Hipótesis

Esta sección del trabajo fue tomada de la tesis de [Ramírez Nuñez \(2015\)](#).

3.2. Pruebas de Hipótesis

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria con densidad $f_X(x; \theta)$; donde $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^k$ con $k \geq 1$ y Ω es el espacio de parámetros. Sea $F_X(x; \theta)$ la función de distribución de probabilidades de X .

Definición 3.1. Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de la distribución de probabilidades de una población o de un parámetro poblacional.

El objetivo de una prueba de hipótesis es decidir, en base a una muestra de la población, de dos hipótesis complementarias cuál es verdadera. Las dos hipótesis complementarias en un problema de prueba de hipótesis se llaman: hipótesis nula (H_0) e hipótesis alternativa (H_1). Si θ denota un parámetro de la población, la forma general de las hipótesis nula y alternativa es $H_0 : \theta \in \omega$ y $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ con $\omega \subset \Omega$.

Definición 3.2. Una prueba de hipótesis es una regla de decisión basada en $\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$ que especifica:

- *Para que valores de la muestra se toma la decisión de aceptar H_0 como verdadera.*
- *Para que valores de la muestra H_0 se rechaza y H_1 se acepta como verdadera.*

Si χ denota todos los valores posibles de X entonces una partición $\{\chi_R, \chi_A\}$ de χ definen una prueba (regla de decisión):

- Rechazar H_0 si $x \in \chi_R$ ($\phi(x) = 1$ si $x \in \chi_R$).
- No Rechazar H_0 si $x \in \chi_A$ ($\phi(x) = 0$ si $x \in \chi_A$).

donde x es una realización de X y ϕ una función $\phi : \chi \rightarrow \{0, 1\}$ que define a una prueba. Esta función se describe en términos de \mathbf{X} mediante otra función cuyo valor es llamado estadístico de prueba, el cual se denota por $T = T(\mathbf{X})$.

A χ_R se le llama región de rechazo, a χ_A región de no rechazo y ϕ función de prueba. Por lo tanto

Rechazar H_0 si $\phi(x) = 1$, $\chi_R(\phi) = \{x \in \chi : \phi(x) = 1\}$

3.2. Pruebas de Hipótesis

No rechazar H_0 si $\phi(x) = 0$, $\chi_A(\phi) = \{x \in \chi : \phi(x) = 0\}$

Cuando se toma una decisión de rechazar o no rechazar H_0 pueden ocurrir dos tipos de errores:

Error tipo I (E.I): Rechazar H_0 cuando es verdadera,

Error tipo II (E.II): No rechazar H_0 cuando es falsa.

Por tanto, cada prueba ϕ tiene asociada una probabilidad del **E.I** y una probabilidad del **E.II**. La evaluación y comparación de pruebas de hipótesis se realiza a través de las probabilidades de los errores de tipo **I** y **II**.

Definición 3.3. Se dice que una prueba ϕ es de nivel α si

$$P(E.I. \text{ usando } \phi) \leq \alpha, \quad \theta \in \omega, \alpha \in (0, 1).$$

Es deseable seleccionar la prueba ϕ^{**} tal que es de nivel α y minimice la probabilidad el error tipo II. A la prueba ϕ^{**} se le llama la prueba uniformemente más potente de nivel α . Usualmente, no existe la prueba ϕ óptima por lo que se fija un tamaño de prueba (α_0), y se trata de identificar una prueba que sea uniformemente más potente de tamaño (α_0) bajo la hipótesis alternativa.

Definición 3.4. El tamaño de la prueba ϕ se define como

$$\sup_{\theta \in \omega} \{\beta_\phi(\theta)\} \leq \alpha, \quad \theta \in \omega.$$

Definición 3.5. La función de potencia de una prueba ϕ es de nivel α para $H_0 : \theta \in \omega$ y $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ es una función $\beta_\phi(\theta) : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} \beta_\phi(\theta) &= P(\text{rechazar } H_0 \text{ usando } \phi | \theta) \\ &= P(\phi(x) = 1 | \theta) \\ &= \int_{\chi_R(\phi)} f_X(x) dx \end{aligned}$$

3.2. Pruebas de Hipótesis

$$= E_{\theta} \{ \phi(x) \}$$

Una descripción más detallada de prueba de hipótesis se puede ver en [Mood *et al.* \(1950\)](#) y [Casella y Berger \(2002\)](#).

Definición 3.6. Sea Y_1, Y_2, \dots, Y_n una muestra aleatoria cuya función de distribución F_Y tiene soporte en todos los números reales. Una prueba de bondad de ajuste es un procedimiento estadístico que se usa para probar la hipótesis de que una función de distribución particular F_0 ajusta un conjunto de datos observados sin especificar una hipótesis alternativa.

Formalmente, se plantea el siguiente juego de hipótesis:

$$H_0 : F_Y(y) = F_0(y) \quad vs \quad H_1 : F_Y(y) \neq F_0(y)$$

donde $F_0(y)$ denota una familia de distribuciones.

Capítulo 4

Pruebas propuestas

En este capítulo se presentan las propuestas de tres pruebas para probar la hipótesis compuesta de que una muestra aleatoria tiene distribución IG .

4.1. Pruebas basadas en transformaciones Gamma

Una manera de realizar una prueba de bondad de ajuste para la distribución $IG(\mu, \lambda)$ con parámetros desconocidos consiste en utilizar la siguiente propiedad del estimador máximo verosimil del parámetro $\frac{1}{\lambda}$. Dada X_1, \dots, X_n una m.a. de la distribución $IG(\mu, \lambda)$, el estimador de máxima verosimilitud de $\frac{1}{\lambda}$ es:

$$V = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{-1} - \bar{X}^{-1}) \sim (n\lambda)^{-1} \times \chi_{n-1}^2.$$

Como el resultado se cumple para toda n , entonces se cumple para el caso particular en que $n = 2$. Por lo tanto, bajo la hipótesis nula:

$$H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \sim IG(\mu, \lambda), \quad (4.1)$$

donde μ y λ son desconocidos. Las variables aleatorias: $V_{ij} \sim (2\lambda)^{-1} \chi_1^2$, donde las $V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X_i} + \frac{1}{X_j} - \frac{2}{\bar{X}_{ij}} \right)$ se calculan con las parejas (X_i, X_j) independientes generadas a partir de la muestra aleatoria, donde $\bar{X}_{ij} = \frac{X_i + X_j}{2}$.

Así la nueva muestra $V_1, V_2, \dots, V_{m=n/2}$ tiene distribución proporcional a una Chi-

4.1. Pruebas basadas en transformaciones Gamma

cuadrada con 1 grado de libertad. Además, observe que

$$(2\lambda)^{-1}\chi_1^2 = (2\lambda)^{-1}\Gamma(1/2, 2) = \Gamma(1/2, (2\lambda)^{-1}2) = \Gamma(1/2, \lambda^{-1}),$$

donde $\Gamma(1/2, \lambda^{-1})$ denota a la distribución Gamma con parámetro de forma $1/2$ y parámetro de escala $1/\lambda$.

Por lo tanto, se propone probar el nuevo juego de hipótesis:

$$H'_0 : V_1, V_2, \dots, V_m \sim \Gamma(1/2, \lambda^{-1}) \quad vs \quad H'_1 : V_1, V_2, \dots, V_m \approx \Gamma(1/2, \lambda^{-1}) \quad (4.2)$$

haciendo uso de la prueba de Anderson–Darling (A^2) y una prueba basada en un estimador del parámetro de forma de la distribución Gamma.

4.1.1. Prueba de Anderson–Darling

El estadístico de prueba de Anderson–Darling se define como:

$$A^2 = -m - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [(2k-1) \log(Z_{(k)}) + (2m+1-2k) \log(1-Z_{(k)})], \quad (4.3)$$

donde $Z_k = F(V_{ij}; 1/2, 2\bar{V}_m)$, F es la función de distribución Gamma y \bar{V}_m es la media muestral de las V_{ij} 's. Las $Z_{(k)}$'s son las estadísticas de orden correspondientes a Z_1, Z_2, \dots, Z_m .

Regla de Decisión

Se rechaza H'_0 con un tamaño de prueba $\alpha \in (0, 1)$ si $A^2 > k_{1-\alpha}$, donde $k_{1-\alpha}$ es el percentil del $100(1-\alpha)\%$ de la distribución de A^2 bajo H'_0 , es decir, es tal que la constante $k_{1-\alpha}$ satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{\frac{1}{\lambda} > 0} P(\text{Rechazar } H'_0 | H'_0) \\ \Leftrightarrow \alpha &= P(\text{Rechazar } H'_0 | H'_0) \\ \Leftrightarrow \alpha &= P(A^2 > k_{1-\alpha} | H'_0) \end{aligned}$$

Note que el supremo desaparece porque A^2 no depende del parámetro de escala $\frac{1}{\lambda}$ de la distribución Gamma.

4.1. Pruebas basadas en transformaciones Gamma

Para obtener $k_{1-\alpha}$ se requiere la distribución de A^2 bajo H'_0 , y para obtenerla se hace uso de simulación Monte Carlo de la siguiente manera.

1. Se genera una m. a. de tamaño m , V_1, V_2, \dots, V_m , de la distribución $\Gamma(1/2, 1)$.
2. Se calcula el valor de la estadística Anderson–Darling dada en (4.3).
3. Se repiten los pasos (1 y 2) $B = 20,000$ veces.
4. El percentil muestral del $100(1 - \alpha)\%$ obtenido con base en los valores de A^2 calculados en el paso 3 proporciona una aproximación de la constante $k_{1-\alpha}$.

Note que el rechazo de H'_0 implica el rechazo de $H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \sim IG(\mu, \lambda)$ con parámetros desconocidos.

	α			
	0.01	0.025	0.05	0.10
n=50	2.274227	1.773232	1.477853	1.17259
n=100	2.172758	1.793283	1.481274	1.18982
n=300	2.233281	1.817291	1.471111	1.170629

Tabla 4.1: Tabla de constantes críticas para la prueba Anderson–Darling basada en transformaciones Gamma.

4.1.2. Prueba T

Sean Y_1, Y_2, \dots, Y_n una m.a. de la distribución $\Gamma(a, b)$ y sea $\overline{\log Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i$. Villaseñor A. y González-Estrada (2015) proponen el siguiente estimador del parámetro de forma de la distribución Gamma:

$$\tilde{a} := \frac{\bar{Y}}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) (\log Y_i - \overline{\log Y})} \quad (4.4)$$

y demuestran que

4.1. Pruebas basadas en transformaciones Gamma

$\sqrt{n}(\check{a}_n - a) \xrightarrow{d} N(0, k^2)$, donde $k^2 = a[a(1 + a\psi'(a)) - 1]$ donde $\psi'(a)$ es la función tri-gamma y " \xrightarrow{d} " denota convergencia en distribución. Se verificó mediante simulación Monte Carlo que \check{a} tiene menor raíz del error cuadrado medio que los estimadores de máxima verosimilitud y de momentos para a , con tamaños de muestra pequeños.

En este trabajo se hace uso del estimador \check{a} y se toma como estadística de prueba a $T := \check{a} - 1/2$ para probar la hipótesis H'_0 dada en (4.2).

Bajo H'_0 se espera que la estadística T tome valores alrededor de 0. Por lo tanto, se tiene una prueba de dos colas.

Regla de Decisión

Se rechaza H'_0 con un tamaño de prueba $\alpha \in (0, 1)$ si $T < k_{\frac{\alpha}{2}}$ ó $T > k_{1-\frac{\alpha}{2}}$, donde $k_{\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil del $100(\frac{\alpha}{2})\%$ y $k_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$ de la distribución de T bajo H'_0 . Es decir, las constantes $k_{\frac{\alpha}{2}}$ y $k_{1-\frac{\alpha}{2}}$ satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{\lambda > 0} P(\text{Rechazar } H'_0 | H'_0) \\ \Leftrightarrow \alpha &= P(\text{Rechazar } H'_0 | H'_0) \\ \Leftrightarrow \alpha &= P(T < k_{\frac{\alpha}{2}} \text{ o } T > k_{1-\frac{\alpha}{2}} | H'_0). \end{aligned}$$

Note que el supremo desaparece porque T es invariante ante cambios en el parámetro de escala de la distribución Gamma; en efecto note que si $b > 0$, $T(bY) = T(Y)$:

Note que

$$\overline{bY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n bY_i = b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = b\overline{Y},$$

y que

$$\begin{aligned} \widehat{Cov}(bY, \log bY) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{(bY_i - \overline{bY})(\log bY_i - \overline{\log bY})\} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{(bY_i - b\overline{Y})(\log(bY_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(bY_i))\} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{b(Y_i - \overline{Y}) [\log b + \log Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log b + \log Y_i)]\} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{b(Y_i - \overline{Y}) [\log b + \log Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log b - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i]\} \end{aligned}$$

4.1. Pruebas basadas en transformaciones Gamma

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{b(Y_i - \bar{Y}) [\log b + \log Y_i - \frac{n}{n} \log b - \overline{\log Y}]\} \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{b(Y_i - \bar{Y}) [\log b + \log Y_i - \log b - \overline{\log Y}]\} \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{b(Y_i - \bar{Y}) (\log Y_i - \overline{\log Y})\} \\
&= b \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) (\log Y_i - \overline{\log Y}) \\
&= b \widehat{Cov}(Y, \log Y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que

$$\begin{aligned}
T(bY) &= \frac{\overline{bY}}{\widehat{Cov}(bY, \log bY)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\overline{bY}}{b \widehat{Cov}(Y, \log Y)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\bar{Y}}{\widehat{Cov}(Y, \log Y)} - \frac{1}{2} = T(Y),
\end{aligned}$$

la estadística T es invariante ante cambios en el parámetro de escala.

Para obtener las constantes $k_{\frac{\alpha}{2}}$ y $k_{1-\frac{\alpha}{2}}$ se requiere F_T bajo H'_0 , y para aproximarla se hace uso de simulación Monte Carlo de la siguiente manera:

1. Se genera una m.a. de tamaño m , V_1, V_2, \dots, V_m , de la distribución $\Gamma(1/2, 1)$.
2. Se obtiene \bar{V} que es la media muestral de las V_i 's.
3. Se obtiene \tilde{a} con base en las V_i 's usando la expresión (4.4).
4. Se calcula el valor de la estadística T .
5. Se repiten los pasos (1 a 4) $B=20,000$ veces.
6. Se toman los percentiles del $100(\frac{\alpha}{2})\%$ y $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$ de la distribución nula de T , los cuales son los valores de las constantes críticas $k_{\frac{\alpha}{2}}$ y $k_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Note que el rechazo de H'_0 implica el rechazo de $H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \sim IG(\mu, \lambda)$ con parámetros desconocidos.

NOTACIÓN: En lo sucesivo, las pruebas basadas en transformaciones Gamma serán denotadas como A_v^2 y T_v .

4.2. Prueba basada en una transformación a normalidad

	α			
	0.01	0.025	0.05	0.10
n=50	-0.2088987	-0.1897508	-0.1724206	-0.1498303
	0.5727148	0.4498389	0.3670012	0.2873284
n=100	-0.1660163	-0.1492415	-0.1333303	-0.115135
	0.3277103	0.2729175	0.2260275	0.1817599
n=300	-0.1060204	-0.09346609	-0.08363567	-0.07228174
	0.1599447	0.1349137	0.1155263	0.09500255

Tabla 4.2: Tabla de constantes críticas para la prueba T (dos colas) basada en transformaciones Gamma.

4.2. Prueba basada en una transformación a normalidad

Los siguientes resultados se toman del libro de [Chhikara y Folks \(1989\)](#) y dicen que para $X \sim IG(\mu, \lambda)$ se cumple lo siguiente:

Teorema 1. Sea $Y = \frac{\sqrt{\lambda}(X-\mu)}{\mu\sqrt{X}}$ entonces la *fdp* y la *fda* son

$$g(y) = \left(1 - \frac{y}{\sqrt{\frac{4\lambda}{\mu} + y^2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\right), \quad -\infty < y < \infty,$$

y

$$G(y) = \Phi(y) + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi\left(-\sqrt{y^2 + \frac{4\lambda}{\mu}}\right), \quad -\infty < y < \infty.$$

Teorema 2. $|Y|$ se distribuye como una variable con distribución Mitad-Normal estándar, denotada como $MN(0, 1)$.

Note que $X^* := \left|\frac{(X-\mu)}{\sqrt{X}}\right| \sim MN\left(0, \frac{\lambda}{\mu^2}\right)$. Sea $U \sim Bernoulli(1/2)$. Note que usando la transformación:

$$Z' := X^*(1 - U) + X^*(-U)$$

4.2. Prueba basada en una transformación a normalidad

se transforma una variable con densidad $IG(\mu, \lambda)$ en una variable con densidad normal con media cero y varianza $\frac{\lambda}{\mu^2}$. La demostración de este resultado es dada en el Apéndice B.

Usando este resultado se propone probar:

$$H_0'' : Z' \sim Normal \quad vs \quad H_1'' : Z' \not\sim Normal, \quad (4.5)$$

en donde las Z' s se calculan reemplazando μ por \bar{X} y las U' s son observaciones simuladas con distribución $Bernoulli(1/2)$.

Para probar este juego de hipótesis se hace uso de la bien conocida prueba para normalidad de Shapiro–Wilk. Note que el rechazo de H_0'' implica el rechazo de H_0 : $X_1, X_2, \dots, X_n \sim IG(\mu, \lambda)$ con parámetros desconocidos.

4.2.1. Prueba de Shapiro–Wilk

La prueba de Shapiro–Wilk se usa para probar normalidad de un conjunto de observaciones, es decir, dada una m.a. Y_1, Y_2, \dots, Y_n de una población con distribución de probabilidades definida en el conjunto de números reales, se prueba el juego de hipótesis:

$$H_0 : Y \sim Normal(\mu, \sigma^2) \quad vs \quad H_1 : Y \not\sim Normal(\mu, \sigma^2),$$

donde los parámetros μ y σ^2 son desconocidos. Esta prueba es una de las pruebas más potentes para el contraste de normalidad, sobre todo para muestras pequeñas ($n < 30$).

El estadístico de prueba es:
$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i y_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

donde

las $y_{(i)}$'s son las estadísticas de orden

\bar{y} es la media muestral

y el vector de las constantes a_i se calculan como

4.2. Prueba basada en una transformación a normalidad

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{m^t V^{-1}}{(m^t V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

donde $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^t$ y los m_1, m_2, \dots, m_n son los valores medios de los estadísticos de orden de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, muestreadas de distribuciones normales estándar. V es la matriz de covarianzas de los estadísticos de orden.

La hipótesis nula se rechaza para valores muy pequeños de W .

Para más información consultar [Shapiro y Wilk \(1965\)](#).

Regla de Decisión

Se rechaza H_0'' si $W < k_\alpha$, donde k_α es el percentil del $100(\alpha)\%$ de la distribución de W bajo normalidad, es decir, es tal que la constante k_α satisface la ecuación:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} P(\text{Rechazar } H_0'' | H_0'') \\ \Leftrightarrow \alpha &= P(\text{Rechazar } H_0'' | H_0'') \\ \Leftrightarrow \alpha &= P(W < k_\alpha | H_0'').\end{aligned}$$

Note que el supremo desaparece porque W es invariante ante cambios de localidad y escala.

Note que el rechazo de H_0'' implica el rechazo de $H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \sim IG(\mu, \lambda)$ con parámetros desconocidos.

NOTACIÓN: En lo sucesivo, la prueba basada en la transformación a normalidad será denotada como W_Z .

Capítulo 5

Estudio del tamaño y potencia de las pruebas

En este capítulo se presenta un estudio del tamaño y la potencia de las pruebas propuestas en el capítulo anterior T_v , A_v^2 y W_Z , haciendo uso de simulación de Monte Carlo. Con fines comparativos también se incluye la prueba de Anderson–Darling basada en bootstrap paramétrico, la cual será denotada como A_x^2 . Todos los cálculos se hicieron en R ([R Core Team, 2015](#)).

Prueba bootstrap de Anderson–Darling

Para probar H_0 dada en la ecuación (4.1), el estadístico de prueba de Anderson–Darling se define como:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i - 1) \log(Z_{(i)}) + (2n + 1 - 2i) \log(1 - Z_{(i)})],$$

donde $Z_{(i)} = F(X_{(i)}; \hat{\mu}, \hat{\lambda})$, $i = 1, \dots, n$, y F es la función de distribución *IG*. Se rechaza H_0 con un tamaño de prueba $\alpha \in (0, 1)$ si $A^2 > C_{1-\alpha}$.

Debido a que la distribución nula del estadístico de prueba A^2 depende de los parámetros μ y λ , los cuales son desconocidos, la constante crítica necesaria para realizar esta prueba se obtiene por bootstrap paramétrico utilizando el siguiente algoritmo.

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria con *fdp* $f_x(x)$.

5.1. Tamaño de las Pruebas

1. De la muestra se obtienen $\hat{\mu}$ y $\hat{\lambda}$.
2. Se simula una m.a. $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \sim IG(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$.
3. Se calculan los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\mu}_{x^*}, \hat{\lambda}_{x^*}$, en base a la muestra generada en (2).
4. Se calcula $A_{x^*}^2$ sustituyendo μ y λ por $\hat{\mu}_{x^*}, \hat{\lambda}_{x^*}$.
5. Se repiten los pasos (2 a 4) $B = 200$ veces. Y se tiene un vector de tamaño 200 de estadísticas $A_{x^*}^2$.
6. Se obtiene la constante crítica $C_{1-\alpha}$ tomando el percentil muestral del $100(1 - \alpha)\%$ de los valores simulados de A^2 en el paso (5).

5.1. Tamaño de las Pruebas

Para estudiar el tamaño de las pruebas se hará uso de la parametrización $IG(1, \phi)$, con $\phi = \lambda/\mu$. Esta parametrización de la distribución nula es también usada en [Edgeman et al. \(1988\)](#), [O'Reilly y Rueda \(1992\)](#), [Pavur et al. \(1992\)](#) y [Mudholkar et al. \(2001\)](#).

Para estimar el tamaño de las pruebas T_v , A_v^2 , W_Z y A_x^2 se usó simulación Monte Carlo con 10,000 repeticiones, tamaños de muestras $n = 50, 100, 300$ y un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$.

Algoritmo para estimar el tamaño de las pruebas

1. Se establece el tamaño de prueba nominal $\alpha \in (0, 1)$.
2. Se genera una muestra aleatoria de tamaño n bajo la hipótesis nula $IG(1, \phi)$, donde ϕ toma valores en el intervalo $(0.1, 10)$.
3. Se calcula el valor de las estadísticas T_v , A_v^2 , W_Z y A_x^2 .
4. Se rechaza la hipótesis nula si los estadísticos calculados T_v , A_v^2 , W_Z y A_x^2 son:
 - a) $T_v \geq k_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o $T_v \leq k_{\frac{\alpha}{2}}$.
 - b) $A_v^2 > k'_{1-\alpha}$.

5.1. Tamaño de las Pruebas

$$c) W_Z < k''_{\alpha}.$$

$$d) A_x^2 > C_{1-\alpha}.$$

5. Se asocia el número 1 a cada prueba cuando se rechaza la hipótesis nula o el número 0 si no se rechaza.
6. Se repiten los pasos (1 a 5) $B = 10,000$ veces.
7. Para cada estadístico se divide por B la suma de los números asociados. El tamaño de la prueba estimado = $\#(\text{rechazos})/B$.

En el Apéndice A se proporcionan los programas en R correspondientes a este algoritmo.

En la Tabla 5.1 se muestran los tamaños de las pruebas estimados mediante simulación Monte Carlo utilizando muestras de tamaño $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

5.1. Tamaño de las Pruebas

	Pruebas				
	ϕ	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	0.05	0.05	0.05	0.05
2	0.50	0.05	0.05	0.05	0.05
3	0.90	0.05	0.05	0.05	0.05
4	1.30	0.05	0.05	0.06	0.05
5	1.70	0.05	0.05	0.06	0.05
6	2.10	0.05	0.05	0.05	0.05
7	2.50	0.05	0.05	0.06	0.05
8	2.90	0.05	0.04	0.04	0.05
9	3.30	0.05	0.05	0.04	0.05
10	3.70	0.05	0.05	0.05	0.05
11	4.10	0.05	0.05	0.05	0.05
12	4.50	0.05	0.05	0.05	0.05
13	4.90	0.05	0.05	0.05	0.05
14	5.30	0.05	0.05	0.05	0.05
15	5.70	0.05	0.05	0.05	0.05
16	6.10	0.05	0.05	0.03	0.05
17	6.50	0.05	0.05	0.06	0.05
18	6.90	0.05	0.04	0.05	0.05
19	7.30	0.05	0.05	0.05	0.05
20	7.70	0.05	0.05	0.05	0.05
21	8.10	0.05	0.05	0.04	0.05
22	8.50	0.05	0.05	0.05	0.05
23	8.90	0.05	0.05	0.05	0.05
24	9.30	0.05	0.05	0.05	0.05
25	9.70	0.05	0.05	0.04	0.04

Tabla 5.1: Tamaños estimados de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z , correspondientes a $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

En las Tablas C.1 y C.2 del Apéndice C se presentan los tamaños estimados con 10,000 iteraciones Monte Carlo, un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$ para las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z con tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 300$.

En las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3 se grafican los tamaños estimados de las pruebas pro-

5.1. Tamaño de las Pruebas

puestas. La línea punteada indica el nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

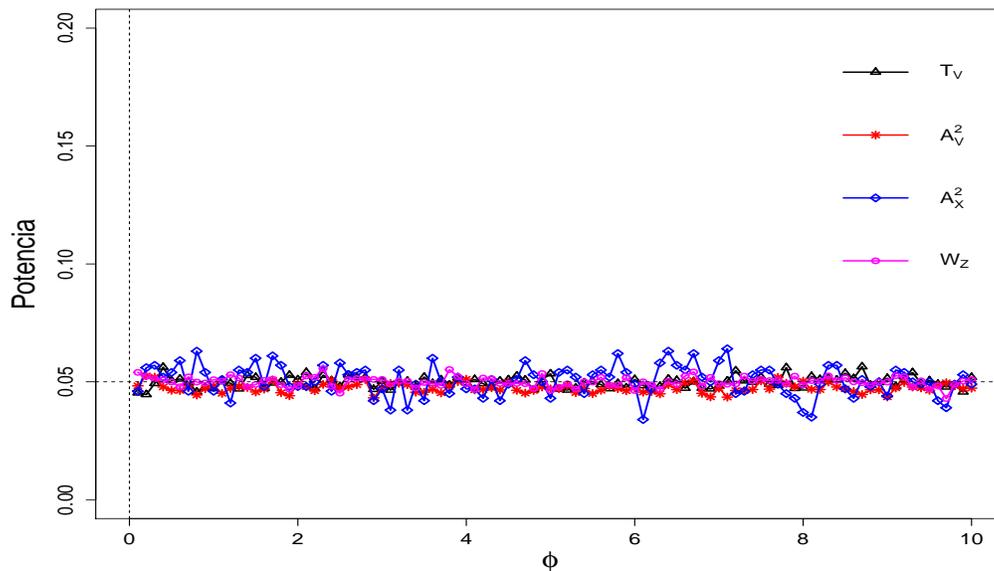


Figura 5.1: Tamaño estimado de las pruebas bajo la distribución $IG(1, \phi)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

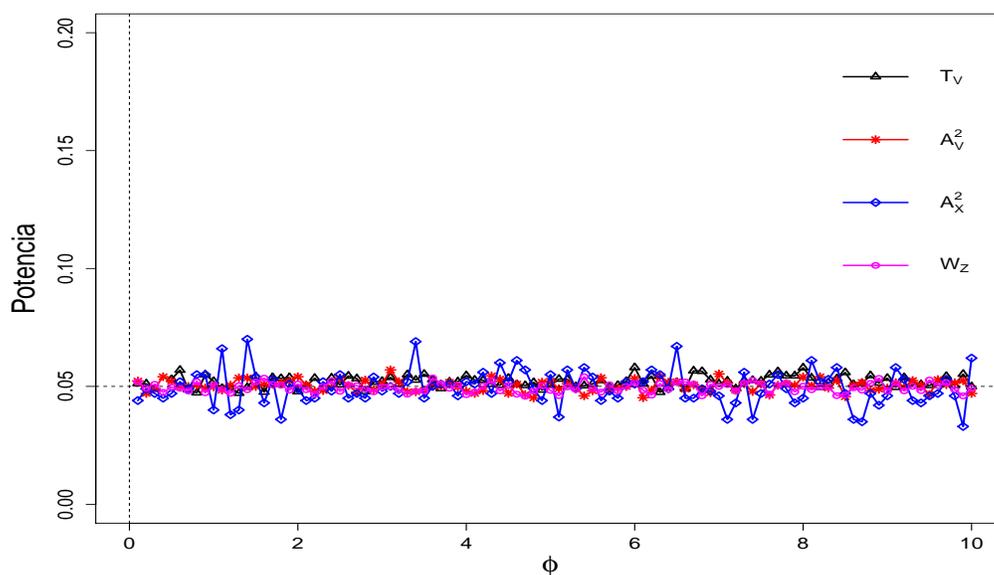


Figura 5.2: Tamaño estimado de las pruebas bajo la distribución $IG(1, \phi)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

5.2. Potencia de las Pruebas

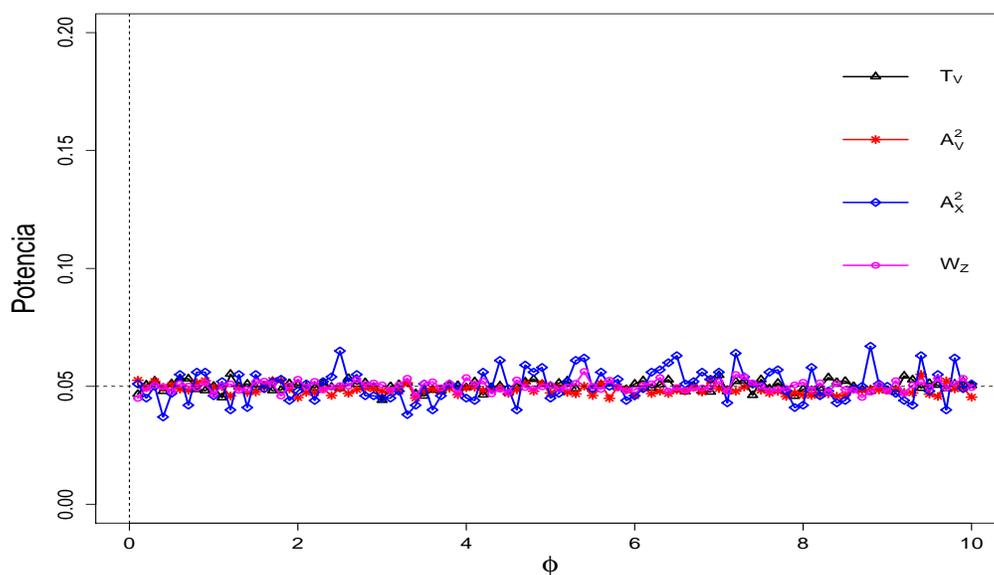


Figura 5.3: Tamaño estimado de las pruebas bajo la distribución $IG(1, \phi)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

Comentario: Se observa que las pruebas T_v , A_v^2 y W_Z conservan el tamaño de la prueba en todos los casos considerados. La prueba A_x^2 tiene más variabilidad ya que se realizó la simulación Monte Carlo con 1,000 iteraciones y un bootstrap con $B = 200$ muestras.

5.2. Potencia de las Pruebas

Para el estudio de la potencia de las pruebas, las distribuciones alternativas son elegidas por su semejanza con la distribución IG ya que en la práctica se usan para modelar comportamientos relacionados con tiempos de vida de algunos objetos. Las funciones de densidad de las distribuciones alternativas así como algunas de sus propiedades son las siguientes.

5.2. Potencia de las Pruebas

5.2.1. Distribución Log-normal

Sea X una variable aleatoria positiva y sea Y una variable aleatoria definida como $Y = \log X$. Si Y tiene distribución Normal, entonces X tiene distribución Log-normal. La densidad de una distribución Log-normal está dada por

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - \mu)^2 \right\}; \quad x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

la cual es denotada como $LNorm(\mu, \sigma)$. La función de distribución acumulada es:

$$F_X(x; \mu, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left\{ \frac{\log x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right\}; \quad x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de la normal estándar.

Sea X una variable aleatoria Log-normal entonces la esperanza y varianza son $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ y $Var(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$.

5.2.2. Distribución Gamma

Una variable aleatoria X tiene distribución Gamma con parámetros de forma y escala (ν, λ) si su función de densidad está dada por

$$f_X(x; \nu, \lambda) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\nu-1}}{\gamma(\nu)}; \quad x \geq 0, \nu > 0, \lambda > 0,$$

la cual es denotada como $Gamma(\nu, \lambda)$.

$\gamma(\nu)$ es la función matemática gamma, definida como

$$\gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\nu-1} dy.$$

Para valores enteros de ν , es decir, $\nu = n$ se tiene que $\gamma(n) = (n-1)!$.

Note que cuando $\nu = 1$, esta distribución se reduce a la distribución Exponencial.

La distribución Gamma con parámetros $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\nu = \frac{n}{2}$, con n un entero positivo, resulta ser la distribución Chi-cuadrada χ_n^2 , con n grados de libertad.

5.2. Potencia de las Pruebas

La esperanza y varianza de X son $E(X) = \frac{\nu}{\lambda}$ y $Var(X) = \frac{\nu}{\lambda^2}$.

5.2.3. Distribución Weibull

La distribución Weibull es ampliamente usada en prácticas de ingeniería por su versatilidad. Ésta fue propuesta originalmente para la interpretación de datos de fatiga, pero ahora se usa también en problemas de ingeniería; en particular, se usa como la distribución de los tiempos de vida de algunos objetos.

La función de densidad Weibull con parámetros de escala y forma (ν, β) tiene la forma:

$$f(x; \nu, \beta) = \frac{\beta}{\nu} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\nu}\right)^\beta\right\}; \quad x > 0, \beta > 0, \nu > 0.$$

La función de distribución acumulada es:

$$F(x; \nu, \beta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\nu}\right)^\beta\right\}; \quad x > 0, \beta > 0, \nu > 0.$$

Esta distribución es denotada como $Weibull(\beta, \nu)$.

Una descripción más detallada de las distribuciones alternativas se puede ver en [Ross \(2010\)](#).

Debido a que las pruebas son invariantes ante cambios en el parámetro de escala, para estimar la potencia de las pruebas se consideraron las distribuciones alternativas: $LNorm(0, \sigma)$, $Weibull(\beta, 1)$ y $Gamma(\nu, 1)$. La potencia de las pruebas se estimó mediante el siguiente algoritmo usando simulación Monte Carlo, considerando muestras de tamaño $n = 50, 100, 300$ y un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$.

Algoritmo para calcular la potencia de las pruebas

1. Se genera una muestra aleatoria de tamaño n bajo la hipótesis alternativa.
2. Se calcula el valor de las estadísticas T_v , A_v^2 , W_Z y A_x^2 .

5.2. Potencia de las Pruebas

3. Se rechaza la hipótesis nula si los estadísticos calculados T_v , A_v^2 , W_Z y A_x^2 son:

a) $T_v \geq k_{1-\frac{\alpha}{2}}$ o $T_v \leq k_{\frac{\alpha}{2}}$.

b) $A_v^2 > k'_{1-\alpha}$.

c) $W_Z < k''_{\alpha}$.

d) $A_x^2 > C_{1-\alpha}$.

4. Se asocia el número 1 a cada prueba cuando se rechaza la hipótesis nula o el número 0 si no se rechaza.

5. Se repiten los pasos (1 a 4) $B = 10,000$ veces.

6. Para cada estadístico, se divide por B la suma de los números asociados.

En las Tablas C.3 a C.11 del Apéndice C se presentan las potencias estimadas.

En las Figuras 5.4 a 5.12 se grafican las potencias estimadas de las tres pruebas propuestas contra las distribuciones alternativas $LNorm(0, \sigma)$, $Weibull(\beta, 1)$ y $Gamma(\nu, 1)$.

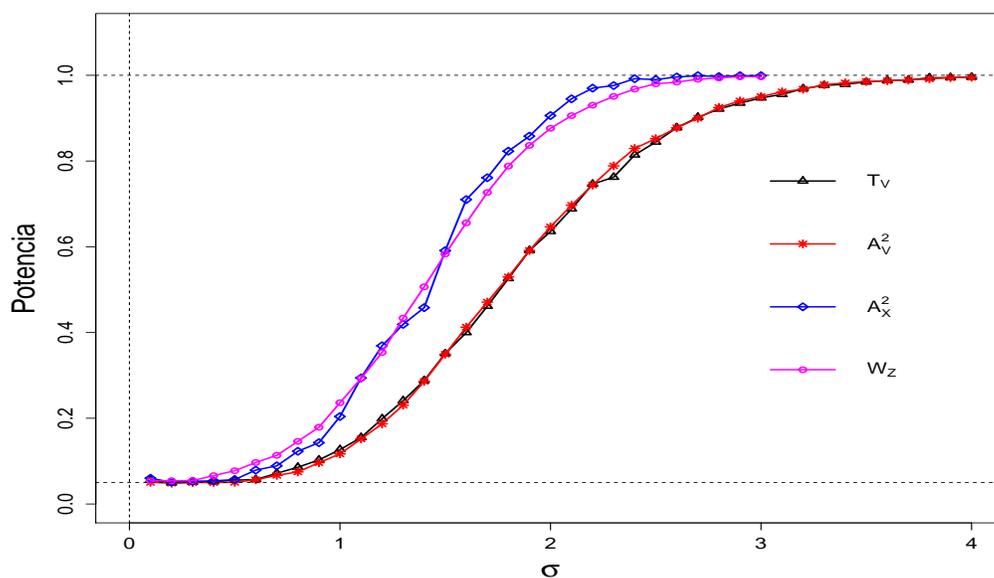


Figura 5.4: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

5.2. Potencia de las Pruebas

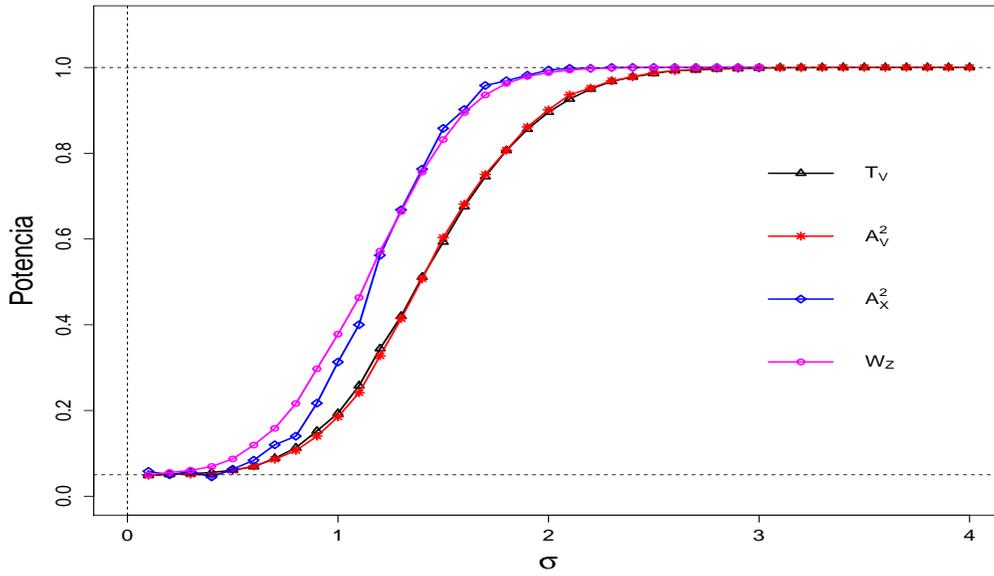


Figura 5.5: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

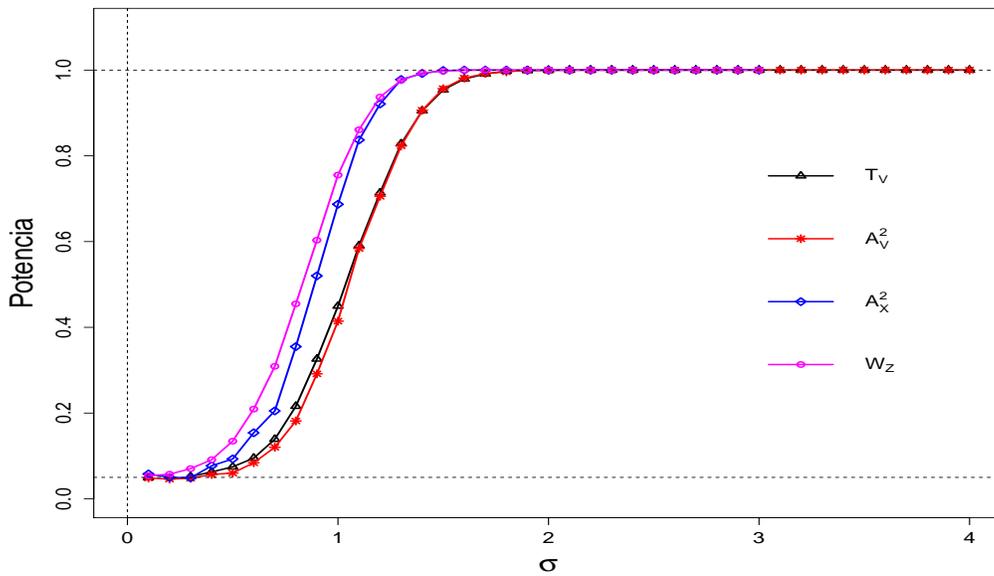


Figura 5.6: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

Comentario: La potencia de las pruebas T_v , A_v^2 son muy parecidas, al modificar el tamaño de la muestra $n = 50, 100, 300$ aumenta la potencia a 1 más rápido a medida

5.2. Potencia de las Pruebas

que aumenta el tamaño de la muestra. Se observa que las pruebas A_x^2 y W_Z también aumentan su valor de potencia cuando aumentamos el tamaño de la muestra; cuando $n = 50$ la potencia de la prueba A_x^2 es un poco mayor que la potencia de la prueba W_Z .

La prueba A_x^2 tiene mayor potencia que la prueba W_Z (en el valor de $\sigma \in (0, 1)$) cuando el tamaño de muestra es $n = 100$. Cuando el tamaño de la muestra es $n = 300$ la potencia de la prueba W_Z es mayor a la potencia de la prueba A_x^2 .

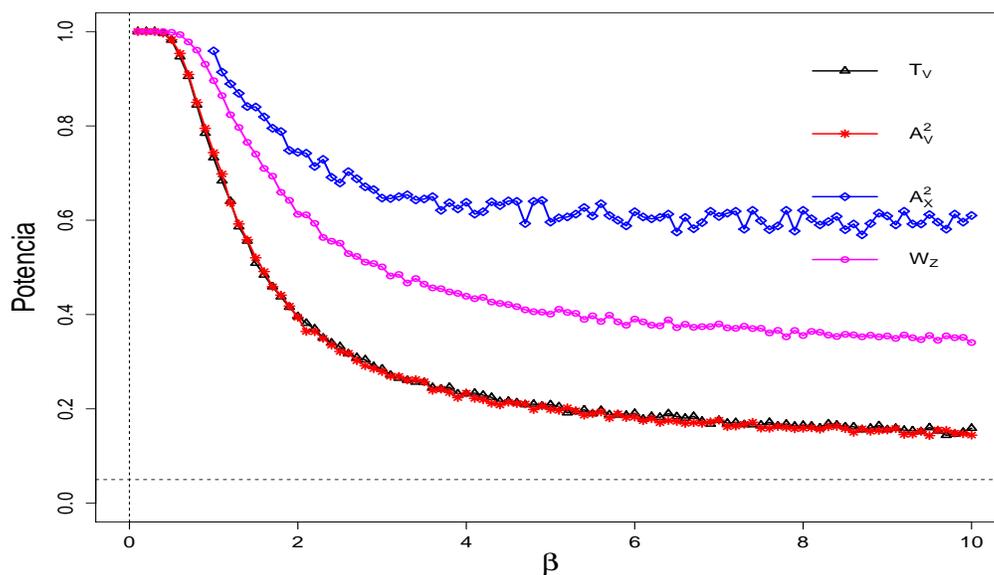


Figura 5.7: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

5.2. Potencia de las Pruebas

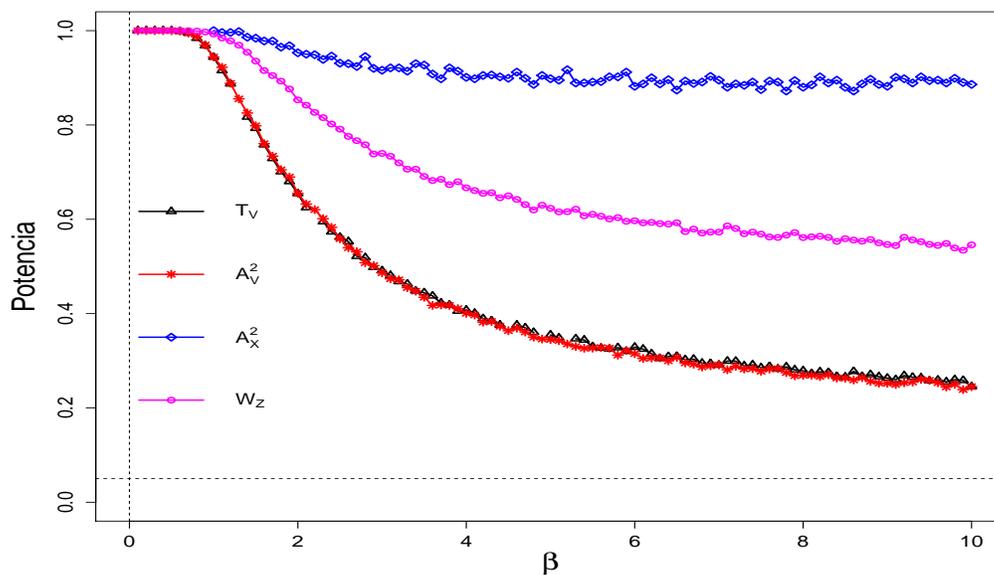


Figura 5.8: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

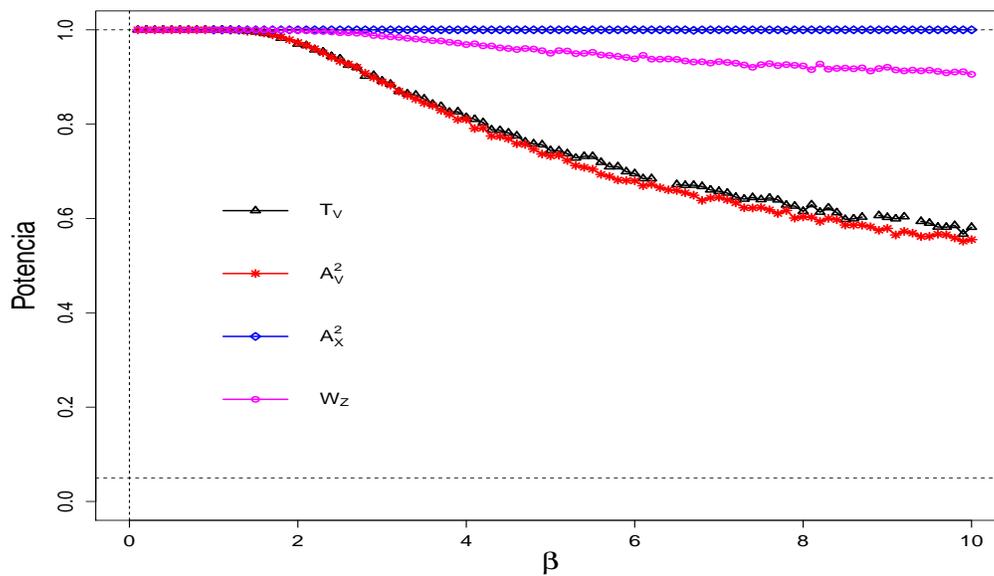


Figura 5.9: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

Comentario: Las potencias de las pruebas T_v , A_v^2 en el caso de la alternativa Weibull son muy parecidas. Al aumentar el tamaño de la muestra ($n = 50, 100, 300$) aumenta la potencia.

5.2. Potencia de las Pruebas

También se observa que las potencias de las pruebas A_x^2 y W_Z aumentan cuando aumentamos el tamaño de la muestra. La potencia de la prueba A_x^2 es mayor que la de la prueba W_Z . Note que en las Figuras 5.7 y 5.8 la potencia de la prueba A_x^2 se calculó para valores del parámetro de forma $\beta \in (1, 10)$ bajo la distribución alternativa Weibull.

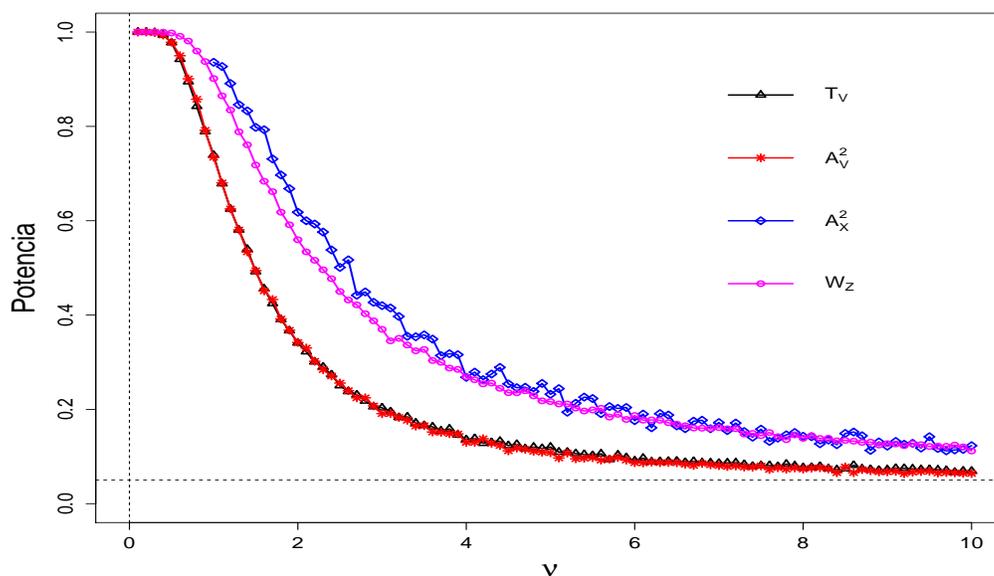


Figura 5.10: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

5.2. Potencia de las Pruebas

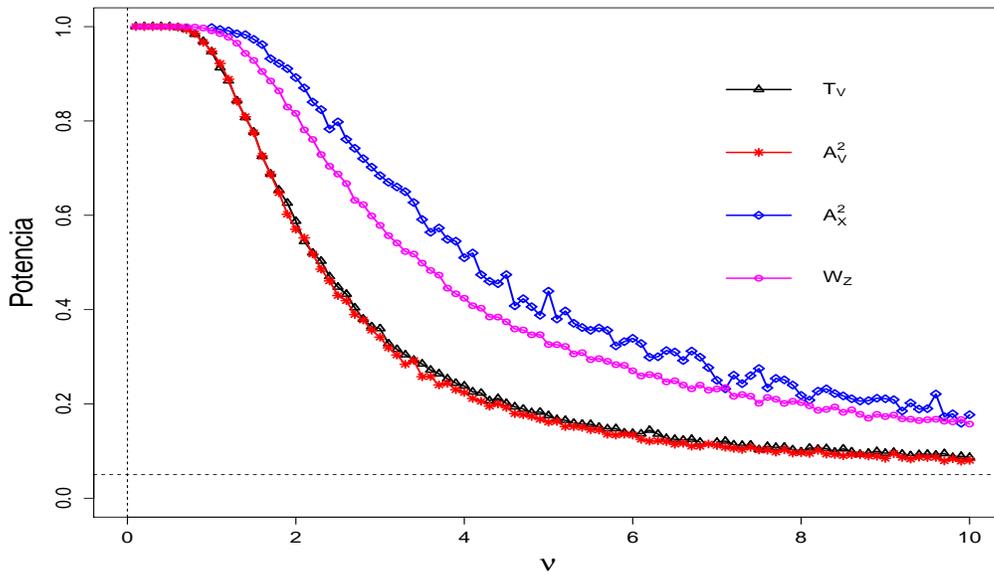


Figura 5.11: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

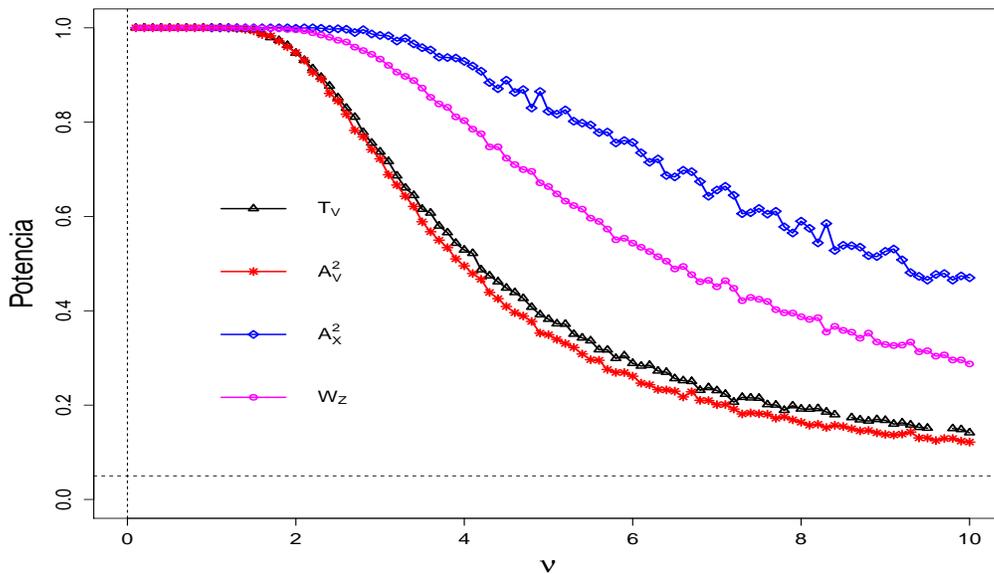


Figura 5.12: Potencia estimada de las pruebas bajo la distribución $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

Comentario: Las potencias de las pruebas T_v , A_v^2 en el caso de la alternativa Gamma son muy parecidas. Al modificar el tamaño de la muestra ($n = 50, 100, 300$) se tiene mayor potencia a medida que éste aumenta.

5.3. Discusión de resultados

Se observa que las pruebas A_x^2 y W_Z aumentan su potencia cuando aumentamos el tamaño de la muestra; cuando $n = 50$ la potencia de la prueba A_x^2 es mayor que la potencia de la prueba W_Z . En las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 la potencia de la prueba A_x^2 se calculó para valores del parámetro de forma $\nu \in (1, 10)$ bajo la distribución alternativa Gamma.

La prueba A_x^2 tiene mayor potencia en los casos en que los tamaños de muestra son $n = 50, 100$ y $n = 300$.

5.3. Discusión de resultados

Después de estimar el tamaño de las pruebas y sus respectivas potencias bajo las distribuciones alternativas $LNorm(0, \sigma)$, $Weibull(\beta, 1)$ y $Gamma(\nu, 1)$, se tiene un análisis de los resultados obtenidos por simulación, dentro de este recuento tenemos:

- Los resultados obtenidos por simulación Monte Carlo dan evidencia de que las pruebas respetan el tamaño fijado y aumentan su potencia cuando aumenta el tamaño de la muestra con $n = 50, 100, 300$.
- Note que en el caso de la alternativa $Gamma(\nu, 1)$ las potencias convergen al tamaño de la prueba α cuando el valor de ν es grande ya que esta distribución tiende a la normal, de la misma manera que la distribución IG .
- Las pruebas basadas en transformaciones Gamma T_v y A_v^2 bajo las distribuciones alternativas $Weibull(\beta, 1)$ y $Gamma(\nu, 1)$ tienen una potencia evidentemente más pequeña que la prueba basada en transformación a normalidad W_Z ; esto puede ser debido a que al usar los datos originalmente con distribución Gaussiana Inversa y transformarlos a datos con distribución Gamma se tiene una disminución del tamaño de la muestra original a la mitad.
- La prueba A_x^2 basada en bootstrap paramétrico es en general más potente que las pruebas propuestas bajo las alternativas Weibull y Gamma; sin embargo, estas pruebas poseen una gran ventaja con respecto a A_x^2 porque requieren muy poco tiempo de cómputo.
- La prueba basada en transformaciones a normalidad W_Z tiene la ventaja de que el investigador puede usar algún otro paquete estadístico o usar otras pruebas de

5.3. Discusión de resultados

normalidad (por ejemplo, Kolmogorov–Smirnov, Anderson–Darling, Lilliefors, Pearson, Cramer–von Misses).

- El tamaño y la potencia de las pruebas también se estimó considerando un nivel de significancia $\alpha = 0.10$. Los resultados son muy parecidos a los obtenidos con un tamaño de prueba $\alpha = 0.05$, es por ello que no se muestran.

Capítulo 6

Conclusiones

Las tres pruebas propuestas preservan el tamaño de prueba. La prueba basada en transformaciones a normalidad en general es más potente que las pruebas basadas en transformaciones Gamma.

Las pruebas propuestas requieren poco tiempo de cómputo cuando se estima el tamaño y la potencia de las pruebas por simulación. Se cumple con el objetivo de probar la prueba de hipótesis compuesta de que, dada una muestra aleatoria, ésta tiene una distribución Gaussiana Inversa con parámetros desconocidos.

Referencias

- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*. Duxbury Pacific Grove, CA., segunda edición.
- Chhikara, R. S. y Folks, J. L. (1989). *The Inverse Gaussian Distribution: Theory Methodology, and Applications*. N^o 95 en Statistics, textbooks and monographs. Marcel Dekker , New York.
- Edgeman, R. L., Scott, R. C. y Pavur, R. J. (1988). A Modified Kolmogorov–Smirnov Test for the Inverse Gaussian Density with Unknown Parameters. *Communications in Statistics–Simula*, 17, 4, 1203–1212.
- Gunes, H., Dietz, D. C., Auclair, P. F. y Moore, A. H. (1997). Modified goodness-of-fit tests for the inverse Gaussian distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 24, 63–77.
- Henze, N. y Klar, B. (2002). Goodness of Fit Test for the Inverse Gaussian Distribution Based on the Empirical Laplace Transform. *Ann Inst. Statist. Math.*, 54, 2, 425–444.
- Mood, A. M., Graybill, F. A. y Boes, D. C. (1950). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw–Hill series in probability and statistics. McGraw-hill, tercera edición.
- Mudholkar, G. S., Natarajan, R. y Chaubey, Y. P. (2001). A Goodnes-of-Fit Test for the Inverse Gaussian Distribution Using Its Independence Characterization. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, B*, 63, 3, 362–374.
- Mudholkar, G. S. y Tian, L. (2002). An entropy characterization of the inverse Gaussian distribution and related goodness–of–fit test. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 102, 211–221.
- Natarajan, R. y Mudholkar, G. S. (2004). Moments–based goodnes–of–fit test for the inverse Gaussian distribution. *Technometrics*, 46, 339–347.

REFERENCIAS

- O'Reilly, F. y Rueda, R. (1992). Goodness of Fit for the Inverse Gaussian Distribution. *The Canadian Journal of Statistics*, 20, 4, 387–397.
- Pavur, R. J., Edgeman, R. L. y Scott, R. C. (1992). Quadratic Statistics for the Goodness-of-Fit Test of the Inverse Gaussian Distribution. *IEEE transactions on reliability*, 41, 1, 118–123.
- R Core Team (2015). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Ramírez Nuñez, A. (2015). Comparación de pruebas de aleatoriedad espacial completa. *Tesis de Maestría en Ciencias, Colegio de Postgraduados, México*.
- Ross, S. M. (2010). *A first course in probability*. Prentice Hall, 8^a edición.
- Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52, 3/4, 591–611.
- Vasicek, O. (1976). A test for normality based on sample entropy. *J. R. Statist. Soc., B*, 33, 54–59.
- Villaseñor A., J. A. y González-Estrada, E. (2015). A variance ratio test of fit for Gamma distributions. *Statistics and Probability Letters*, 96, 281–286.

Apéndice A

Aspectos computacionales

Breve descripción de las funciones para calcular el tamaño y las potencias de las pruebas propuestas:

El software que se utilizó para el desarrollo de este trabajo fue R, ([R Core Team, 2015](#)).

1	Prueba T_v
---	--------------

Descripción

Se presentan las funciones de la prueba T_v usando transformaciones Gamma y el parámetro de forma de la distribución Gamma propuesto por [Villaseñor A. y González-Estrada \(2015\)](#).

Uso

POWER_ALFA_IG (n,mu1,lambda,k_alfa,MC)

POWER_ALFA_LN (n,mu0,phiLN, k_alfa,MC)

POWER_ALFA_WEI(n,mu1,phiWEI,k_alfa,MC)

POWER_ALFA_GA (n,mu1,phiGA, k_alfa,MC)

A Aspectos computacionales

Argumentos

n	Tamaño de muestra.
k_alfa	Valores de las constantes críticas.
mu0	Valor del parámetro de localización de la distribución Log–Normal.
mu1	Valor del parámetro de localización de la distribución IG y de los parámetros de escala de las distribuciones Gamma y Weibull.
lambda	Valor del parámetro de escala de la distribución IG.
phiLN	Valor del parámetro de escala de la distribución Log–Normal.
phiWEI	Valor del parámetro de forma de la distribución Weibull.
phiGA	Valor del parámetro de forma de la distribución Gamma.
MC	Número de iteraciones Monte Carlo.

Valor

El valor potencia_ALFA_IG es un vector de valores de tamaños,

El valor potencia_ALFA_LN es un vector de valores de potencia,

El valor potencia_ALFA_WEI es un vector de valores de potencia,

El valor potencia_ALFA_GA es un vector de valores de potencia.

Codigo R

```
#####
#####      CONSTANTES CRÍTICAS      #####
N=20000
m=25
estadistica_T <- rep(NA,N)
beta=1
for(j in 1:N){
v <- rgamma(m,1/2,beta)
v_barra <- mean(v)
alfa_hat <- v_barra/cov(v,log(v))
est_Tj <- alfa_hat-1/2
estadistica_T[j] <- est_Tj
}
infimo <- quantile(estadistica_T,0.025) ##### alfa nominal de 0.05
supremo <- quantile(estadistica_T,0.975) ##### dos colas
k_alfa<-c(infimo, supremo)
#####

POWER_ALFA_IG <- function(n,mu,lambda,k_alfa,MC){
library("SuppDists")
estadistica_T <- rep(NA,MC)
```

A Aspectos computacionales

```
for(j in 1:MC){
Y<- rinvGauss(n,mu,lambda)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
Vis<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind

v_barra <- mean(Vis)
alfa_hat <- v_barra/cov(Vis,log(Vis))
est_Tj <- alfa_hat-1/2 # Hipotesis Ho:Vi ~Ga(1/2,beta)
estadistica_T[j] <- est_Tj
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
P_valor <- sum(estadistica_T <= k_alfa[1] | estadistica_T >= k_alfa[2])/MC
return(P_valor)
}

POWER_ALFA_LN <- function(n,mu,phi,k_alfa,MC){
estadistica_T <- rep(NA,MC)
for(j in 1:MC){
Y <- rlnorm(n, mu,phi)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2
Vis<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2

v_barra <- mean(Vis)
alfa_hat <- v_barra/cov(Vis,log(Vis))
est_Tj <- alfa_hat-1/2
estadistica_T[j] <- est_Tj
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
P_valor <- sum(estadistica_T <= k_alfa[1] | estadistica_T >= k_alfa[2])/MC
return(P_valor)
}

POWER_ALFA_WEI<- function(n,mu,phi,k_alfa,MC){
estadistica_T <- rep(NA,MC)
for(j in 1:MC){
Y <- rweibull(n,phi,mu)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2
Vis<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2

v_barra <- mean(Vis)
alfa_hat <- v_barra/cov(Vis,log(Vis))
est_Tj <- alfa_hat-1/2
estadistica_T[j] <- est_Tj
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
P_valor <- sum(estadistica_T <= k_alfa[1] | estadistica_T >= k_alfa[2])/MC
```

A Aspectos computacionales

```
return(P_valor)
}

POWER_ALFA_GA <- function(n,mu,phi,k_alfa,MC){
estadistica_T <- rep(NA,MC)
for(j in 1:MC){
Y <- rgamma(n,phi,mu)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2
Vis<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2

v_barra <- mean(Vis)
alfa_hat <- v_barra/cov(Vis,log(Vis))
est_Tj <- alfa_hat-1/2
estadistica_T[j] <- est_Tj
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
P_valor <- sum(estadistica_T <= k_alfa[1] | estadistica_T >= k_alfa[2])/MC
return(P_valor)
}

#####
n=50
mu0 <- 0
mu1 <- 1
lambda <- seq(0.1,10,0.1)
phiLN <- seq(0.1, 4,0.1)
phiWEI <- seq(0.1,10,0.1)
phiGA <- seq(0.1,10,0.1)
MC=10000
#####

potencia_ALFA_IG<-numeric(length(lambda))
for(l in 1:length(lambda)){
val_l<- POWER_ALFA_IG(n,mu1,lambda[l],k_alfa,MC)
potencia_ALFA_IG[l] <-val_l
}

potencia_ALFA_LN<-numeric(length(phiLN))
for(l in 1:length(phiLN)){
val_l<- POWER_ALFA_LN(n,mu0,phiLN[l],k_alfa,MC)
potencia_ALFA_LN[l] <-val_l
}

potencia_ALFA_WEI<-numeric(length(phiWEI))
for(l in 1:length(phiWEI)){
val_l<- POWER_ALFA_WEI(n,mu1,phiWEI[l],k_alfa,MC)
potencia_ALFA_WEI[l] <-val_l
}

potencia_ALFA_GA<-numeric(length(phiGA))
for(l in 1:length(phiGA)){
val_l<- POWER_ALFA_GA(n,mu1,phiGA[l],k_alfa,MC)
```

A Aspectos computacionales

```
potencia_ALFA_GA[1] <-val_1
}
#####
```

2 Prueba A_v^2

Descripción

Se presentan las funciones de la prueba A_v^2 usando transformaciones Gamma para la muestra original y la estadística de prueba Anderson–Darling.

Uso

Tamaño_AD_IG (n,mu1,lambda,A2_calc,MC)

Tamaño_AD_LN (n,mu0,phiLN, A2_calc,MC)

Tamaño_AD_WEI(n,mu1,phiWEI,A2_calc,MC)

Tamaño_AD_GA (n,mu1,phiGA, A2_calc,MC)

Argumentos

n Tamaño de muestra.
A2_calc Valores de la constante crítica.
mu0 Valor del parámetro de localización de la distribución Log–Normal.
mu1 Valor del parámetro de localización de la distribución IG y de los parámetros de escala de las distribuciones Gamma y Weibull.
lambda Valor del parámetro de escala de la distribución IG.
phiLN Valor del parámetro de escala de la distribución Log–Normal.
phiWEI Valor del parámetro de forma de la distribución Weibull.
phiGA Valor del parámetro de forma de la distribución Gamma.
MC Número de iteraciones Monte Carlo.

Valor

El valor `potencia_IG_AD` es un vector de valores de tamaños,

El valor `potencia_AD_LN` es un vector de valores de potencia,

A Aspectos computacionales

El valor potencia_AD_WEI es un vector de valores de potencia,

El valor potencia_AD_GA es un vector de valores de potencia.

Codigo R

```
#####
#####      CONSTANTE CRÍTICA      #####
B=20000 ;m=50
anderson<- numeric(B)
for(j in 1:B){
  Y<- rgamma(m,1/2,1)
  xbarra_m <- mean(Y)          ##### EMV de los Vi's
  A2_i<- rep(NA,m)
  Z <- pgamma(sort(Y),1/2,scale = 2*xbarra_m)
  for(i in 1:m){
    val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*m+1-2*i)*log(1-Z[i])
    A2_i[i] <- val_i
  }
  A2_j <- -m-1/m*sum(A2_i)
  anderson[j] <- A2_j
}
A2_calc<-quantile(anderson,0.950) ##### alfa nominal de 0.05
#####

Tamaño_AD_IG <- function(n,mu,lambda,A2_calc,B){
  anderson <- numeric(B)
  library("SuppDists")

  for(j in 1:B){
    Y<- rinvGauss(n,mu,lambda)
    m <- n/2
    w1 <- Y[1:m]
    w2 <- Y[m+1:m]

    xbarra_n2 <- (w1+w2)/2          # es de las muestra tamaño 2 ind
    v_n2<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
    #Ho:v1,...,vm ~ c*X2 con n-1 g.l.==> c*Ga(1/2,2) = Ga(1/2,2*c)
    xbarra_m <- mean(v_n2)          # EMV muestral de los Vi's
    V_i <- sort(v_n2)              # vector de Vi's son iid size=m
    A2_i<- rep(NA,m)
    Z <- pgamma(V_i,1/2,scale = 2*xbarra_m)
    # Aquí esta la hipotesis nula ga(1/2,2*X_EMV)
    for(i in 1:m){
      val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*m+1-2*i)*log(1-Z[i])
      A2_i[i] <- val_i
    }
    A2_j <- -m-1/m*sum(A2_i)
    anderson[j] <- A2_j
  }
  ##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
}
```

A Aspectos computacionales

```
Tamaño_Pru_IG <- sum(anderson >= A2_calc)/B
return(Tamaño_Pru_IG)
}

Tamaño_AD_LN <- function(n,mu,phi,A2_calc,B){
anderson <- numeric(B)
library("SuppDists")
for(j in 1:B){
Y <- rlnorm(n, mu,phi)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
v_n2<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
#Ho:v1,...,vm ~ c*X2 con n-1 g.l.==> c*Ga(1/2,2) = Ga(1/2,2*c)
xbarra_m <- mean(v_n2) # EMV muestral de los Vi's
V_i <- sort(v_n2) # vector de Vi's son iid size=m
A2_i<- rep(NA,m)
Z <- pgamma(V_i,1/2,scale = 2*xbarra_m)
# Aquí esta la hipotesis nula ga(1/2,2*X_EMV)
for(i in 1:m){
val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*m+1-2*i)*log(1-Z[i])
A2_i[i] <- val_i
}
A2_j <- -m-1/m*sum(A2_i)
anderson[j] <- A2_j
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
Tamaño_Pru_LN <- sum(anderson >= A2_calc)/B
return(Tamaño_Pru_LN)
}

Tamaño_AD_WEI<- function(n,mu,phi,A2_calc,B){
anderson <- numeric(B)

for(j in 1:B){
Y <- rweibull(n,phi,mu)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
v_n2<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
xbarra_m <- mean(v_n2) # EMV muestral de los Vi's
V_i <- sort(v_n2) # vector de Vi's son iid size=m
A2_i<- rep(NA,m)
Z <- pgamma(V_i,1/2,scale = 2*xbarra_m)
# Aquí esta la hipotesis nula ga(1/2,2*X_EMV)
for(i in 1:m){
val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*m+1-2*i)*log(1-Z[i])
A2_i[i] <- val_i
}
A2_j <- -m-1/m*sum(A2_i)
anderson[j] <- A2_j
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
```

A Aspectos computacionales

```
Tamaño_Pru_WEI <- sum(anderson >= A2_calc)/B
return(Tamaño_Pru_WEI)
}

Tamaño_AD_GA <- function(n,mu,phi,A2_calc,B){
anderson <- numeric(B)

for(j in 1:B){
Y <- rgamma(n,phi,mu)
m <- n/2
w1 <- Y[1:m]
w2 <- Y[m+1:m]
xbarra_n2 <- (w1+w2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
v_n2<- (1/w1+1/w2-2/xbarra_n2)/2 # es de las muestra tamaño 2 ind
xbarra_m <- mean(v_n2) # EMV muestral de los Vi's
V_i <- sort(v_n2) # vector de Vi's son iid size=m
A2_i<- rep(NA,m)
Z <- pgamma(V_i,1/2,scale = 2*xbarra_m)
# Aquí esta la hipotesis nula ga(1/2,2*X_EMV)
for(i in 1:m){
val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*m+1-2*i)*log(1-Z[i])
A2_i[i] <- val_i
}
A2_j <- -m-1/m*sum(A2_i)
anderson[j] <- A2_j
}
##### Aproximar el Tamaño de la prueba #####
Tamaño_Pru_GA <- sum(anderson >= A2_calc)/B
return(Tamaño_Pru_GA)
}
#####
n = 50
mu1 <- 1
mu0 <- 0
lambda <- seq(0.1,10,0.1)
phiLN <- seq(0.1, 4,0.1)
phiWEI <- seq(0.1,10,0.1)
phiGA <- seq(0.1,10,0.1)
MC = 10000
#####
potencia_IG_AD<-numeric(length(lambda))
for(f in 1:length(lambda)){
val_f<- Tamaño_AD_IG(n,mu1,lambda[f],A2_calc,MC)
potencia_IG_AD[f] <-val_f
}

potencia_AD_LN<-numeric(length(phiLN))
for(l in 1:length(phiLN)){
val_l<- Tamaño_AD_LN(n,mu0,phiLN[l],A2_calc,MC)
potencia_AD_LN[l] <-val_l
}

potencia_AD_WEI<-numeric(length(phiWEI))
for(l in 1:length(phiWEI)){
val_l<- Tamaño_AD_WEI(n,mu1,phiWEI[l],A2_calc,MC)
```

A Aspectos computacionales

```
potencia_AD_WEI[l] <-val_1
}

potencia_AD_GA<-numeric(length(phiGA))
for(l in 1:length(phiGA)){
val_1<- Tamaño_AD_GA(n,mu1,phiGA[l],A2_calc,MC)
potencia_AD_GA[l] <-val_1
}
#####
#####
```

3 Prueba A_x^2

Descripción

Se presentan las funciones de la prueba A_x^2 para la muestra original y la estadística de prueba Anderson–Darling usando un bootstrap paramétrico.

Uso

```
Power1_AD_IG (n,mu1,lambda,alfa,B,MC1)
Power1_AD_LN (n,mu0,phiLN, alfa,B,MC1)
Power1_AD_WEI(n,mu1,phiWEI,alfa,B,MC1)
Power1_AD_GA (n,mu1,phiGA, alfa,B,MC1)
```

Argumentos

n	Tamaño de muestra.
alfa	Nivel de significancia.
B	Número de muestras BootStrap.
mu0	Valor del parámetro de localización de la distribución Log–Normal.
mu1	Valor del parámetro de localización de la distribución IG y de los parámetros de escala de las distribuciones Gamma y Weibull.
lambda	Valor del parámetro de escala de la distribución IG.
phiLN1	Valor del parámetro de escala de la distribución Log–Normal.
phiWEI1	Valor del parámetro de forma de la distribución Weibull.
phiGA1	Valor del parámetro de forma de la distribución Gamma.

A Aspectos computacionales

MC1 Número de iteraciones Monte Carlo.

Valor

El valor `poten_AD_IG` es un vector de valores de tamaños,
El valor `poten_AD_LN` es un vector de valores de potencia,
El valor `poten_AD_WEI` es un vector de valores de potencia,
El valor `poten_AD_GA` es un vector de valores de potencia.

Código R

Las funciones **Power1-AD-LN**, **Power1-AD-WEI** y **Power1-AD-GA** se calculan de la misma manera que **Power1-AD-IG** pero en la *Muestra inicial para obtener parámetros semilla* se modifica la distribución de la cual se quiere generar números aleatorios, es decir, Log-normal, Weibull o Gamma.

```
#####  
Power1_AD_IG <- function(n,mu,lambda,alfa,B,MC){  
  
  potenciaIG <- numeric()  
  condicionIG <- c(MC)  
  p_valor <- c(MC)  
  
  for(k in 1:MC){  
    #####  
    ### Muestra inicial para obtener parámetros semilla #####  
    library("SuppDists")  
    Y<- rinvGauss(n,mu,lambda)  
    mu_0 <- mean(Y)  
    lambda_0<- n/sum(1/Y-1/mu_0)  
    #####  
    ### Bajo la hipótesis de que X ~ IG( ?,?) #####  
    anderson <- numeric(B)  
    ### Estadístico A-D calculado con la muestra inicial #####  
    x<- rinvGauss(n,mu_0,lambda_0)  
    x <- sort(x)  
    mu_xhat <- mean(x)  
    lambda_xhat<- n/sum(1/x-1/mu_xhat)  
    Z<- pinvGauss(x, mu_xhat, lambda_xhat, lower.tail=TRUE, log.p=FALSE)  
    A2_i<- numeric()  
    for(i in 1:n){  
      val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*n+1-2*i)*log(1-Z[i])  
      A2_i <- c(A2_i,val_i)  
    }  
  }  
}
```

A Aspectos computacionales

```
A2_calc <- -n-1/n*sum(A2_i)
A2_calc
#####
##### BOOTSTRAP PARAMETRICO PARA A-D #####

for(j in 1:B){
#### 1) Generar X~iid de una IG(mu_0,lambda_0) #####
x<- rinvGauss(n,mu_0,lambda_0)
x <- sort(x) #Estadísticos de orden de la muestra aleatoria IG inicial.
#### 2) calcular mu_xhat y lambda_xhat #####
mu_xhat <- mean(x)
lambda_xhat<- n/sum(1/x-1/mu_xhat)
#### 3) calcular A2 usando mu_xhat y lambda_xhat en la fda estimada #####
A2_i<- numeric()
Z<- pinvGauss(x, mu_xhat, lambda_xhat, lower.tail=TRUE, log.p=FALSE)
for(i in 1:n){
val_i <- (2*i-1)*log(Z[i]) + (2*n+1-2*i)*log(1-Z[i])
A2_i <- c(A2_i,val_i)
}
A2_j <- -n-1/n*sum(A2_i)
anderson[j] <- A2_j
#### 4) Repetir B veces los pasos 1, 2 y 3 #####
}

#### Aproximar el p-valor #####
p_valor <- sum(anderson >= A2_calc)/B
#### Aproximar potencia #####
if(p_valor < alfa) condicionIG[k]=1 else condicionIG[k]=0
potenciaIG <- sum(condicionIG)/MC
}
return(potenciaIG)
}

#####
n=50
mu1 <- 1
mu0 <- 0
lambda <- seq(0.1,10,0.1)
phiLN1 <- seq(0.1,3,0.1)
phiWEI1 <- seq(1, 10,0.1) #Empieza en 1 porque antes la potencia es 1
phiGA1 <- seq(1, 10,0.1)
alfa = 0.05
B = 200
MC1 = 1000
#####

poten_AD_IG<-numeric(length(lambda))
for(l in 1:length(lambda)){
val_l<- Power1_AD_IG(n,mu1,lambda[l],alfa,B,MC1)
poten_AD_IG[l] <-val_l
}

poten_AD_LN<-numeric(length(phiLN1))
for(l in 1:length(phiLN1)){
val_l<- Power1_AD_LN(n,mu0,phiLN1[l],alfa,B,MC1)
```

A Aspectos computacionales

```
poten_AD_LN[l] <-val_1
}

poten_AD_WEI<-numeric(length(phiWEI1))
for(l in 1:length(phiWEI1)){
val_1<- Power1_AD_WEI(n,phiWEI1[l],mu1,alfa,B,MC1)
poten_AD_WEI[l] <-val_1
}

poten_AD_GA<-numeric(length(phiGA1))
for(l in 1:length(phiGA1)){
val_1<- Power1_AD_GA(n,phiGA1[l],mu1,alfa,B,MC1)
poten_AD_GA[l] <-val_1
}
#####
```

4

Prueba W_Z

Descripción

Se presentan las funciones de la prueba W_Z usando transformaciones a Normalidad de la muestra original y la prueba de Shapiro–Wilk.

Uso

```
SIZE_NORMAL (n,mu1,lambda,alfa,MC)
SIZE_LN (n,mu0,phiLN1, alfa,MC)
SIZE_WEI (n,mu1,phiWEI,alfa,MC)
SIZE_GA (n,mu1,phiGA, alfa,MC)
```

Argumentos

n Tamaño de muestra.

mu0 Valor del parámetro de localización de la distribución Log–Normal.

mu1 Valor del parámetro de localización de la distribución IG y de los parámetros de escala de las distribuciones Gamma y Weibull.

lambda Valor del parámetro de escala de la distribución IG.

phiLN1 Valor del parámetro de escala de la distribución Log–Normal.

phiWEI Valor del parámetro de forma de la distribución Weibull.

A Aspectos computacionales

phiGA	Valor del parámetro de forma de la distribución Gamma.
alfa	Nivel de significancia.
MC	Número de iteraciones Monte Carlo.

Valor

El valor potencia_NORMAL es un vector de valores de tamaños,

El valor potencia_LN es un vector de valores de potencia,

El valor potencia_WEI es un vector de valores de potencia,

El valor potencia_GA es un vector de valores de potencia.

Codigo R

```
#####  
  
SIZE_NORMAL<- function(n,mu,lambda,alfa,B){  
potencia_NORMAL <- numeric()  
condicionNOR <- c(B)  
p_valor <- c(B)  
  
for(i in 1:B){  
library("SuppDists")  
x <- rinvGauss(n,mu,lambda)  
x_barra <- mean(x) # Estimador de MV de mu  
Y <- abs((x-x_barra)/sqrt(x)) # Se distribuye aprox. HN(0, sigma^2)  
u <- rbinom(n,1,1/2) # U ~ Bern(1/2)  
w <- Y*(1-u) + Y*(-u) # Mezcla de Y y U para generar una N(0,sigma^2)  
p_valor <- shapiro.test(w)$p.value  
  
if(p_valor < alfa) condicionNOR[i]=1 else condicionNOR[i]=0  
potencia_NORMAL <- sum(condicionNOR)/B  
}  
  
return(potencia_NORMAL)  
}  
  
SIZE_LN <- function(n,mu,phi,alfa,B){  
potencia_LN <- numeric()  
condicionLN <- c(B)  
p_valor <- c(B)  
  
for(i in 1:B){  
x <- rlnorm(n,mu,phi)  
x_barra <- mean(x) # Estimador de MV de mu  
Y <- abs((x-x_barra)/sqrt(x)) # Se distribuye aprox. HN(0, sigma^2)  
u <- rbinom(n,1,1/2) # U ~ Bern(1/2)
```

A Aspectos computacionales

```
w <- Y*(1-u) + Y*(-u) # Mezcla de Y y U para generar una N(0,sigma^2)
p_valor <- shapiro.test(w)$p.value

if(p_valor < alfa) condicionLN[i]=1 else condicionLN[i]=0
potencia_LN <- sum(condicionLN)/B
}
return(potencia_LN)
}

SIZE_WEI <- function(n,mu,phi,alfa,B){
potencia_WEI <- numeric()
condicionWEI <- c(B)
p_valor <- c(B)

for(i in 1:B){
x <- rweibull(n,phi,mu)
x_barra <- mean(x) # Estimador de MV de mu
Y <- abs((x-x_barra)/sqrt(x)) # Se distribuye aprox. HN(0, sigma^2)
u <- rbinom(n,1,1/2) # U ~ Bern(1/2)
w <- Y*(1-u) + Y*(-u) # Mezcla de Y y U para generar una N(0,sigma^2)
p_valor <- shapiro.test(w)$p.value

if(p_valor < alfa) condicionWEI[i]=1 else condicionWEI[i]=0
potencia_WEI <- sum(condicionWEI)/B
}
return(potencia_WEI)
}

SIZE_GA <- function(n,mu,phi,alfa,B){
potencia_GA <- numeric()
condicionGA <- c(B)
p_valor <- c(B)

for(i in 1:B){
x <- rgamma(n,phi,mu)
x_barra <- mean(x) # Estimador de MV de mu
Y <- abs((x-x_barra)/sqrt(x)) # Se distribuye aprox. HN(0, sigma^2)
u <- rbinom(n,1,1/2) # U ~ Bern(1/2)
w <- Y*(1-u) + Y*(-u) # Mezcla de Y y U para generar una N(0,sigma^2)
p_valor <- shapiro.test(w)$p.value

if(p_valor < alfa) condicionGA[i]=1 else condicionGA[i]=0
potencia_GA <- sum(condicionGA)/B
}
return(potencia_GA)
}

#####
n=50
mu=1
mu0=0
lambda <- seq(0.1,10,0.1)
phiLN1 <- seq(0.1, 3,0.1)
phiWEI <- seq(0.1,10,0.1)
phiGA <- seq(0.1,10,0.1)
```

A Aspectos computacionales

```
alfa=0.05
MC=10000
#####

potencia_NORMAL<-numeric(length(lambda))
for(f in 1:length(lambda)){
  val_f<- SIZE_NORMAL(n,mu1,lambda[f],alfa,MC)
  potencia_NORMAL[f] <-val_f
}

potencia_LN<-numeric(length(phiLN1))
for(f in 1:length(phiLN1)){
  val_f<- SIZE_LN(n,mu0,phiLN1[f],alfa,MC)
  potencia_LN[f] <-val_f
}

potencia_WEI<-numeric(length(phiWEI))
for(f in 1:length(phiWEI)){
  val_f<- SIZE_WEI(n,mu1,phiWEI[f],alfa,MC)
  potencia_WEI[f] <-val_f
}

potencia_GA<-numeric(length(phiGA))
for(f in 1:length(phiGA)){
  val_f<- SIZE_GA(n,mu1,phiGA[f],alfa,MC)
  potencia_GA[f] <-val_f
}

#####
```

T_v ,

A_v^2 ,

A_x^2 ,

W_Z .

Gráficas del Tamaño y Potencia de las pruebas.

Descripción

Se estimó el tamaño y potencia de las pruebas T_v, A_v^2, A_x^2 y W_Z con un mismo tamaño de muestra $n = 50$ y nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

Código R

```
#####
```

A Aspectos computacionales

```
#####
par(mar=c(4.5,5.5,2,2)) #tamaño de margenes

plot(lambda,potencia_ALFA_IG,pch=2,cex.lab="2",
ylab=expression(beta) , xlab=expression(phi),
xlim= c(0,10), ylim=c(0,0.2),col=1,type="o",lty=1,lwd=2)

lines(lambda,potencia_IG_AD, col=2,lty=1,type="o",pch=8,lwd=2)
lines(lambda,poten_AD_IG, col=4,lty=1,type="o",pch=5,lwd=2)
lines(lambda,potencia_NORMAL,col=6,lty=1,type="o",pch=1,lwd=2)

abline(h=0.05,lty=2,col="black")
abline(v=0,lty=2,col="black")

legend('topright',bty='n',horiz=F,legend=c(expression(T[V]), expression(A[V]^2), expression(A[X]^2), expression(Z)),
col = c(1,2,4,6),pch=c(2,8,5,1), text.col = "black",lty=c(1,1,1,1),lwd=c(2,2,2,2),
merge = TRUE)

#####
#####
plot(phiLN,potencia_ALFA_LN,pch=2,cex.lab="2",
ylab=expression(beta) , xlab=expression(phi),
xlim= c(0,4), ylim=c(0,1.1),col=1,type="o",lty=1,lwd=2)

lines(phiLN,potencia_AD_LN,col=2,type="o",lty=1,lwd=2,pch=8)
lines(phiLN1,poten_AD_LN, col=4,type="o",lty=1,lwd=2,pch=5)
lines(phiLN1,potencia_LN, col=6,type="o",lty=1,lwd=2,pch=1)

abline(h=0.05,lty=2,col="black")
abline(v=0, lty=2,col="black")
abline(h=1, lty=2,col="black")

#####
#####
plot(phiWEI,potencia_ALFA_WEI,pch=2,cex.lab="2",
ylab=expression(beta) , xlab=expression(phi),
xlim= c(0,10), ylim=c(0,1),col=1,type="o",lty=1,lwd=2)

lines(phiWEI,potencia_AD_WEI,col=2,lty=1,type="o",pch=8,lwd=2)
lines(phiWEI1,poten_AD_WEI, col=4,lty=1,type="o",pch=5,lwd=2)
lines(phiWEI,potencia_WEI, col=6,lty=1,type="o",pch=1,lwd=2)

abline(h=0.05,lty=2,col="black")
abline(v=0, lty=2,col="black")

#####
#####
plot(phiGA,potencia_ALFA_GA,pch=2,cex.lab="2",
ylab=expression(beta) , xlab=expression(phi),
xlim= c(0,10), ylim=c(0,1),col=1,type="o",lty=1,lwd=2)

lines(phiGA,potencia_AD_GA,col=2,lty=1,type="o",pch=8,lwd=2)
lines(phiGA1,poten_AD_GA, col=4,lty=1,type="o",pch=5,lwd=2)
lines(phiGA,potencia_GA, col=6,lty=1,type="o",pch=1,lwd=2)
```

A Aspectos computacionales

```
abline(h=0.05,lty=2,col="black")
abline(v=0,lty=2,col="black")
#####
```

Apéndice B

Demostración de la transformación a normalidad

Si $X^* \sim MN(0, 1)$ y $U \sim Bernoulli(1/2)$. Entonces $Z' = X^*(1 - U) + X^*(-U) \sim N(0, 1)$.

Note que

$$Z' = X^* - X^*U - X^*U = X^* - 2X^*U = X^*(1 - 2U).$$

Sea $U^* = 1 - 2U$, entonces la *fdp* de la variable aleatoria discreta U^* es:

$$f_{U^*}(u^*) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } u^* = -1 \\ 1/2 & \text{si } u^* = 1 \end{cases}$$

$$\therefore Z' = X^*U^*.$$

Como X^* y U^* son variables aleatorias continua y discreta, la función generatriz de momentos de Z' es:

$$m_{Z'}(t) = E \left\{ e^{tZ'} \right\} = E \left\{ e^{tX^*U^*} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{u^*} e^{tx^*u^*} f_{X^*, U^*}(x^*, u^*) dx^*.$$

B Demostración de la transformación a normalidad

Como u^* solo toma dos valores se reduce la sumatoria a dos sumandos

$$m_{Z'}(t) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x^*)^2}{2} - tx^*} dx^* + \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x^*)^2}{2} + tx^*} dx^*$$
$$m_{Z'}(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x^*+t)^2}{2}} dx^* + \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x^*-t)^2}{2}} dx^*$$

Se identifica el kernel de una función de densidad $MN(-t, 1)$ en la primera integral y una $MN(t, 1)$ en la segunda integral.

$$m_{Z'}(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x^*-(-t))^2}{2}} dx^* + \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x^*-t)^2}{2}} dx^*$$
$$m_{Z'}(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} (1) + \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} (1) \Rightarrow m_{Z'}(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2} + \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2}$$

$$\therefore m_{Z'}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \quad !!!$$

Por lo tanto, $m_{Z'}(t)$ es una *fgm* de una variable aleatoria $N(0, 1)$.

Apéndice C

Tablas de tamaños y potencias

A continuación se tienen las tablas de los tamaños y potencias estimadas de las pruebas propuestas para 25 valores de los parámetros ϕ, σ, β y ν .

1 Tamaños estimados de las pruebas para distribución Nula *IG*

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	ϕ	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	0.05	0.05	0.04	0.05
2	0.50	0.05	0.05	0.05	0.05
3	0.90	0.05	0.05	0.06	0.05
4	1.30	0.05	0.05	0.04	0.05
5	1.70	0.05	0.05	0.05	0.05
6	2.10	0.05	0.05	0.04	0.05
7	2.50	0.05	0.05	0.06	0.05
8	2.90	0.05	0.05	0.05	0.05
9	3.30	0.06	0.05	0.05	0.05
10	3.70	0.05	0.05	0.05	0.05
11	4.10	0.05	0.05	0.05	0.05
12	4.50	0.05	0.05	0.05	0.05
13	4.90	0.05	0.05	0.04	0.05
14	5.30	0.05	0.05	0.05	0.05
15	5.70	0.05	0.05	0.05	0.05
16	6.10	0.05	0.05	0.05	0.05
17	6.50	0.05	0.05	0.07	0.05
18	6.90	0.05	0.05	0.05	0.05
19	7.30	0.05	0.05	0.06	0.05
20	7.70	0.06	0.05	0.06	0.05
21	8.10	0.05	0.05	0.06	0.05
22	8.50	0.06	0.05	0.05	0.05
23	8.90	0.05	0.05	0.04	0.05
24	9.30	0.05	0.05	0.04	0.05
25	9.70	0.05	0.05	0.05	0.05

Tabla C.1: Tamaños estimados para las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z , correspondientes a $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	ϕ	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	0.05	0.05	0.05	0.04
2	0.50	0.05	0.05	0.05	0.05
3	0.90	0.05	0.05	0.06	0.05
4	1.30	0.05	0.05	0.06	0.05
5	1.70	0.05	0.05	0.05	0.05
6	2.10	0.05	0.05	0.05	0.05
7	2.50	0.05	0.05	0.06	0.05
8	2.90	0.05	0.05	0.05	0.05
9	3.30	0.05	0.05	0.04	0.05
10	3.70	0.05	0.05	0.05	0.05
11	4.10	0.05	0.05	0.04	0.05
12	4.50	0.05	0.05	0.05	0.05
13	4.90	0.05	0.05	0.06	0.05
14	5.30	0.05	0.05	0.06	0.05
15	5.70	0.05	0.04	0.05	0.05
16	6.10	0.05	0.05	0.05	0.05
17	6.50	0.05	0.05	0.06	0.05
18	6.90	0.05	0.05	0.05	0.05
19	7.30	0.05	0.05	0.05	0.05
20	7.70	0.05	0.05	0.06	0.05
21	8.10	0.05	0.05	0.06	0.05
22	8.50	0.05	0.05	0.04	0.05
23	8.90	0.05	0.05	0.05	0.05
24	9.30	0.05	0.05	0.04	0.05
25	9.70	0.05	0.05	0.04	0.05

Tabla C.2: Tamaños estimados para las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z , correspondientes a $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	σ	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	0.06	0.05	0.06	0.05
2	0.20	0.05	0.05	0.05	0.05
3	0.30	0.05	0.05	0.05	0.05
4	0.40	0.05	0.05	0.05	0.07
5	0.50	0.06	0.05	0.06	0.08
6	0.60	0.06	0.06	0.08	0.10
7	0.70	0.07	0.07	0.09	0.11
8	0.80	0.09	0.07	0.12	0.15
9	0.90	0.10	0.10	0.14	0.18
10	1.00	0.13	0.12	0.20	0.24
11	1.10	0.15	0.15	0.29	0.29
12	1.20	0.20	0.19	0.37	0.35
13	1.30	0.24	0.23	0.42	0.43
14	1.40	0.29	0.29	0.46	0.51
15	1.50	0.35	0.35	0.59	0.58
16	1.60	0.40	0.41	0.71	0.66
17	1.70	0.46	0.47	0.76	0.73
18	1.80	0.53	0.53	0.82	0.79
19	1.90	0.59	0.59	0.86	0.84
20	2.00	0.64	0.65	0.91	0.88
21	2.10	0.69	0.70	0.94	0.91
22	2.20	0.75	0.74	0.97	0.93
23	2.30	0.76	0.79	0.98	0.95
24	2.40	0.81	0.83	0.99	0.97
25	2.50	0.84	0.85	0.99	0.98
26	2.60	0.88	0.88	1.00	0.98
27	2.70	0.90	0.90	1.00	0.99
28	2.80	0.92	0.92	1.00	0.99
29	2.90	0.94	0.94	1.00	1.00
30	3.00	0.95	0.95	1.00	1.00

Tabla C.3: Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	σ	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	0.05	0.05	0.06	0.05
2	0.20	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.30	0.05	0.05	0.06	0.06
4	0.40	0.06	0.05	0.04	0.07
5	0.50	0.06	0.06	0.06	0.09
6	0.60	0.07	0.07	0.08	0.12
7	0.70	0.09	0.09	0.12	0.16
8	0.80	0.11	0.11	0.14	0.22
9	0.90	0.15	0.14	0.22	0.30
10	1.00	0.19	0.19	0.31	0.38
11	1.10	0.26	0.24	0.40	0.46
12	1.20	0.34	0.33	0.56	0.57
13	1.30	0.42	0.41	0.67	0.66
14	1.40	0.51	0.51	0.76	0.76
15	1.50	0.59	0.60	0.86	0.83
16	1.60	0.68	0.68	0.90	0.89
17	1.70	0.75	0.75	0.96	0.94
18	1.80	0.81	0.81	0.97	0.96
19	1.90	0.86	0.86	0.98	0.98
20	2.00	0.90	0.90	0.99	0.99
21	2.10	0.93	0.94	1.00	0.99
22	2.20	0.95	0.95	1.00	1.00
23	2.30	0.97	0.97	1.00	1.00
24	2.40	0.98	0.98	1.00	1.00
25	2.50	0.99	0.99	1.00	1.00
26	2.60	0.99	0.99	1.00	1.00
27	2.70	0.99	1.00	1.00	1.00
28	2.80	1.00	1.00	1.00	1.00
29	2.90	1.00	1.00	1.00	1.00
30	3.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabla C.4: Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

	Pruebas				
	σ	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	0.05	0.05	0.06	0.05
2	0.20	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.30	0.05	0.05	0.05	0.07
4	0.40	0.06	0.06	0.08	0.09
5	0.50	0.07	0.06	0.09	0.13
6	0.60	0.10	0.08	0.15	0.21
7	0.70	0.14	0.12	0.20	0.31
8	0.80	0.22	0.18	0.35	0.45
9	0.90	0.33	0.29	0.52	0.60
10	1.00	0.45	0.41	0.69	0.76
11	1.10	0.59	0.58	0.84	0.86
12	1.20	0.71	0.71	0.92	0.94
13	1.30	0.83	0.82	0.98	0.98
14	1.40	0.90	0.91	0.99	0.99
15	1.50	0.95	0.96	1.00	1.00
16	1.60	0.98	0.98	1.00	1.00
17	1.70	0.99	0.99	1.00	1.00
18	1.80	1.00	1.00	1.00	1.00
19	1.90	1.00	1.00	1.00	1.00
20	2.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabla C.5: Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $LNorm(0, \sigma)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	β	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.50	0.98	0.98	1.00	1.00
3	0.90	0.78	0.79	1.00	0.93
4	1.30	0.59	0.59	0.87	0.80
5	1.70	0.46	0.46	0.80	0.69
6	2.10	0.38	0.36	0.74	0.61
7	2.50	0.33	0.32	0.68	0.55
8	2.90	0.29	0.29	0.66	0.51
9	3.30	0.26	0.26	0.65	0.47
10	3.70	0.24	0.24	0.62	0.45
11	4.10	0.23	0.22	0.61	0.43
12	4.50	0.22	0.21	0.64	0.42
13	4.90	0.21	0.21	0.64	0.41
14	5.30	0.19	0.20	0.61	0.40
15	5.70	0.19	0.18	0.61	0.40
16	6.10	0.18	0.17	0.61	0.38
17	6.50	0.18	0.17	0.57	0.37
18	6.90	0.17	0.17	0.62	0.37
19	7.30	0.17	0.17	0.58	0.38
20	7.70	0.16	0.16	0.59	0.37
21	8.10	0.16	0.16	0.60	0.36
22	8.50	0.16	0.16	0.58	0.36
23	8.90	0.16	0.15	0.61	0.35
24	9.30	0.15	0.15	0.59	0.35
25	9.70	0.14	0.15	0.58	0.35

Tabla C.6: Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	β	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00
3	0.90	0.97	0.97	1.00	1.00
4	1.30	0.86	0.86	1.00	0.97
5	1.70	0.73	0.73	0.98	0.90
6	2.10	0.62	0.63	0.95	0.84
7	2.50	0.56	0.56	0.93	0.79
8	2.90	0.50	0.50	0.92	0.74
9	3.30	0.46	0.46	0.91	0.71
10	3.70	0.42	0.42	0.90	0.68
11	4.10	0.40	0.40	0.90	0.66
12	4.50	0.36	0.36	0.90	0.65
13	4.90	0.35	0.35	0.90	0.63
14	5.30	0.35	0.33	0.89	0.62
15	5.70	0.32	0.33	0.90	0.60
16	6.10	0.32	0.30	0.89	0.59
17	6.50	0.31	0.31	0.87	0.59
18	6.90	0.29	0.29	0.90	0.57
19	7.30	0.29	0.28	0.88	0.57
20	7.70	0.28	0.28	0.89	0.56
21	8.10	0.27	0.27	0.88	0.56
22	8.50	0.27	0.26	0.88	0.56
23	8.90	0.27	0.25	0.89	0.55
24	9.30	0.26	0.25	0.89	0.56
25	9.70	0.26	0.24	0.89	0.55

Tabla C.7: Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	β	T_v	A_v^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00
3	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00
4	1.30	1.00	1.00	1.00	1.00
5	1.70	0.99	0.99	1.00	1.00
6	2.10	0.97	0.97	1.00	1.00
7	2.50	0.94	0.93	1.00	0.99
8	2.90	0.90	0.90	1.00	0.99
9	3.30	0.86	0.86	1.00	0.98
10	3.70	0.84	0.83	1.00	0.98
11	4.10	0.81	0.79	1.00	0.97
12	4.50	0.78	0.77	1.00	0.96
13	4.90	0.76	0.74	1.00	0.96
14	5.30	0.73	0.71	1.00	0.95
15	5.70	0.71	0.69	1.00	0.95
16	6.10	0.68	0.67	1.00	0.95
17	6.50	0.67	0.66	1.00	0.94
18	6.90	0.66	0.64	1.00	0.93
19	7.30	0.64	0.62	1.00	0.93
20	7.70	0.64	0.61	1.00	0.92
21	8.10	0.63	0.60	1.00	0.92
22	8.50	0.60	0.59	1.00	0.92
23	8.90	0.61	0.57	1.00	0.92
24	9.30	0.58	0.57	1.00	0.91
25	9.70	0.58	0.57	1.00	0.91

Tabla C.8: Potencia estimada de las pruebas T_v , A_v^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Weibull(\beta, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	ν	T_ν	A_ν^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.50	0.98	0.98	1.00	1.00
3	0.90	0.79	0.79	1.00	0.94
4	1.30	0.58	0.58	0.85	0.79
5	1.70	0.42	0.43	0.73	0.66
6	2.10	0.32	0.33	0.60	0.53
7	2.50	0.25	0.26	0.50	0.45
8	2.90	0.21	0.21	0.43	0.39
9	3.30	0.18	0.18	0.35	0.34
10	3.70	0.15	0.15	0.31	0.30
11	4.10	0.14	0.13	0.28	0.26
12	4.50	0.12	0.11	0.25	0.24
13	4.90	0.12	0.11	0.26	0.22
14	5.30	0.11	0.10	0.21	0.20
15	5.70	0.09	0.09	0.21	0.18
16	6.10	0.10	0.09	0.19	0.18
17	6.50	0.09	0.09	0.16	0.17
18	6.90	0.09	0.08	0.16	0.16
19	7.30	0.08	0.08	0.15	0.15
20	7.70	0.08	0.08	0.14	0.14
21	8.10	0.08	0.08	0.14	0.14
22	8.50	0.07	0.08	0.15	0.13
23	8.90	0.07	0.07	0.13	0.12
24	9.30	0.07	0.07	0.13	0.13
25	9.70	0.07	0.07	0.11	0.12

Tabla C.9: Potencia estimada de las pruebas T_ν , A_ν^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 50$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	ν	T_ν	A_ν^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00
3	0.90	0.97	0.97	1.00	1.00
4	1.30	0.84	0.84	0.98	0.96
5	1.70	0.69	0.69	0.93	0.88
6	2.10	0.54	0.55	0.87	0.78
7	2.50	0.45	0.43	0.80	0.69
8	2.90	0.36	0.36	0.70	0.60
9	3.30	0.30	0.28	0.65	0.52
10	3.70	0.26	0.24	0.57	0.47
11	4.10	0.23	0.21	0.52	0.41
12	4.50	0.20	0.19	0.47	0.37
13	4.90	0.18	0.17	0.39	0.35
14	5.30	0.16	0.15	0.37	0.31
15	5.70	0.15	0.14	0.36	0.29
16	6.10	0.14	0.12	0.33	0.26
17	6.50	0.12	0.11	0.31	0.25
18	6.90	0.12	0.12	0.28	0.23
19	7.30	0.11	0.10	0.24	0.22
20	7.70	0.11	0.10	0.25	0.21
21	8.10	0.11	0.10	0.21	0.20
22	8.50	0.10	0.09	0.22	0.18
23	8.90	0.10	0.09	0.21	0.18
24	9.30	0.09	0.08	0.20	0.17
25	9.70	0.09	0.08	0.17	0.16

Tabla C.10: Potencia estimada de las pruebas T_ν , A_ν^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 100$ y $\alpha = 0.05$.

C Tablas de tamaños y potencias

	Pruebas				
	ν	T_ν	A_ν^2	A_x^2	W_Z
1	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00
3	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00
4	1.30	1.00	1.00	1.00	1.00
5	1.70	0.98	0.98	1.00	1.00
6	2.10	0.93	0.93	1.00	0.99
7	2.50	0.85	0.84	1.00	0.97
8	2.90	0.76	0.74	0.99	0.94
9	3.30	0.66	0.64	0.98	0.90
10	3.70	0.58	0.55	0.94	0.84
11	4.10	0.52	0.48	0.92	0.79
12	4.50	0.45	0.41	0.89	0.72
13	4.90	0.39	0.35	0.86	0.67
14	5.30	0.35	0.32	0.80	0.62
15	5.70	0.32	0.28	0.78	0.57
16	6.10	0.28	0.25	0.73	0.53
17	6.50	0.26	0.23	0.68	0.49
18	6.90	0.24	0.21	0.64	0.46
19	7.30	0.22	0.18	0.61	0.42
20	7.70	0.20	0.17	0.61	0.40
21	8.10	0.19	0.16	0.57	0.38
22	8.50	0.17	0.15	0.54	0.36
23	8.90	0.17	0.14	0.52	0.33
24	9.30	0.16	0.14	0.48	0.33
25	9.70	0.15	0.13	0.48	0.31

Tabla C.11: Potencia estimada de las pruebas T_ν , A_ν^2 , A_x^2 y W_Z contra la alternativa $Gamma(\nu, 1)$, con $n = 300$ y $\alpha = 0.05$.