



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN
EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

MODELACIÓN DE LA TENDENCIA DE LA TEMPERATURA EN LA REGIÓN SURESTE DE MÉXICO

Victoria Alejandra Segura Saldaña

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO

2016


La presente tesis titulada: **MODELACIÓN DE LA TENDENCIA DE LA TEMPERATURA EN LA REGIÓN SURESTE DE MÉXICO**, realizada por la alumna: **VICTORIA ALEJANDRA SEGURA SALDAÑA**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

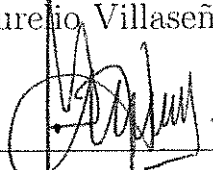
MAESTRA EN CIENCIAS


**SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA**

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERA Elizabeth González E.
Dra. Elizabeth González Estrada

DIRECTOR 
Dr. José Aurelio Villaseñor Alva

ASESOR 
Dr. Gerardo H. Terrazas González

ASESOR 
M.C. Armando Ramírez Román

Montecillo, Texcoco, México, Marzo de 2016

Modelación de la tendencia de la temperatura en la región sureste de México

Victoria Alejandra Segura Saldaña, MC.

Colegio de Postgraduados, 2016.

Resumen

Se usa la metodología de Regresión Polinomial Local para el estudio de la tendencia de la temperatura en la Región Sureste de México. Los datos usados corresponden a temperaturas medias, máximas y mínimas del periodo comprendido entre 1921 y 2012. Los resultados indican que existe una tendencia decreciente de la temperatura media y mínima del periodo de estudio, mientras que la temperatura máxima tiene una tendencia creciente. Así mismo, se analizó el rango de la temperatura y se encontró que éste muestra una tendencia creciente, es decir, el clima de esta región ha llegado a ser más extremo en los 92 años de estudio.

Palabras Clave: Regresión Polinomial Local, Tendencia, Temperatura, Clima, Región Sureste de México.

Modelling temperature trends from the Southeast region of Mexico

Victoria Alejandra Segura Saldaña, MC.
Colegio de Postgraduados, 2016.

Abstract

In this paper, the method of Local Polynomial Regression is used for the study of temperature trend in the Southeast Region of Mexico. The used data correspond to average, maximum and minimum temperatures between 1921 and 2012. The results show a decreasing trend for the average and minimum temperatures, while the maximum temperature has a growing trend. Furthermore, the temperature range was also analyzed. It was found that this variable has an increasing trend which means that climate of this region has become more extreme in the 92 years of study.

Key Words: Local Polynomial Regression, Trends, Temperature, Weather, Southeast Region of Mexico.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo económico brindado durante mis estudios de posgrado.

Al Colegio de Postgraduados, por haberme brindado la oportunidad de seguir mi formación académica en sus aulas.

A los integrantes de mi Consejo Particular:

A la Dra. Elizabeth González Estrada, por el apoyo recibido y el tiempo dedicado en la revisión de este trabajo de tesis.

Al Dr. José Villaseñor Alva, por su dirección, sin la cual la presente investigación no se habría realizado.

Al Dr. Gerardo H. Terrazas González, por sus observaciones, consejos y ayuda desinteresada en la realización de la presente investigación. Así como, por todo el apoyo brindado en cada una de mis actividades a lo largo del posgrado; y ahora como profesionista, pero sobre todo por ser un gran amigo.

Al M.C. Armando Ramírez Román por la gran motivación que me ha contagiado para seguir siempre adelante, por ser quien me alentó a estudiar un posgrado en estadística, pero principalmente por ser un verdadero amigo mostrándome en todo momento su apoyo desinteresado.

Al M.C. Fredy Yair Montes Rivera por todas las muestras de apoyo durante esta etapa y por ser alguien que me animó a entrar al mundo de la estadística.

A mis profesores, compañeros de clase y todos aquellos que de alguna u otra manera fueron contribuyeron en esta tarea.

DEDICATORIA

A mis padres, Jacinto Segura y María Victoria Saldaña, por su amor, apoyo, enseñanzas y trabajo en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy.

A mis hermanas Karla y Adriana, por todas las memorias vividas, los sueños futuros y por estar en otro momento tan importante en mi vida.

En especial, a Rubén González (QEPD) por que en espíritu tú no te has ido, sigues aquí conmigo en mi corazón, en mi mente y en todos los recuerdos por todas aquellas alegrías que compartimos aún a pesar de la distancia.

Contenido

1. Introducción	1
2. Regresión No-paramétrica	4
2.1. Antecedentes	4
2.2. Modelo de Regresión No-paramétrica	5
2.3. Regresión Polinomial Local	6
2.3.1. Selección del Ancho de Banda	9
2.3.2. Selección del Grado del Polinomio	10
2.3.3. Selección de la Función Kernel	11
3. Metodología	12
3.1. Área de Estudio y Fuente de Información	12
3.2. Selección del Grado del Polinomio	13
3.3. Selección del Ancho de Banda	15
4. Resultados y Discusión	18

CONTENIDO

4.1. Tendencia de la Temperatura Media, Máxima y Mínima en la Región Sureste	20
4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año	22
4.3. Modelación de la Tendencia del Rango de la Temperatura	29
5. Conclusiones	32
Referencias	33
Apéndice	34
Apéndice A: Códigos de Programas en R para seleccionar el grado del polinomio mediante el Criterio AIC	34
Apéndice B: Códigos de Programas en R para seleccionar el parámetro de suavizamiento	40
Apéndice C: Códigos de Programas en R para estimar la tendencia de la temperatura mediante regresión local polinomial	45

Lista de Tablas

3.1. Valores del AIC para la selección del grado del polinomio p para el ajuste de Regresión Polinomial Local.	14
3.2. Anchos de Banda para las Temperaturas Media, Máxima y Mínima Anual para cada una de las estaciones del año.	17
3.3. Anchos de Banda para el Rango de la Temperatura.	17
4.1. Pruebas de Significancia de la tendencia en las temperaturas.	19

Lista de Figuras

3.1. Área de estudio – Región Sureste de México	12
3.2. Gráfica de Validación Cruzada para seleccionar el ancho de banda h para estimar la Tendencia de la Temperatura Media.	16
3.3. Gráfica de Validación Cruzada para seleccionar el ancho de banda h para estimar la Tendencia de la Temperatura Máxima.	16
3.4. Gráfica de Validación Cruzada para seleccionar el ancho de banda h para estimar la Tendencia de la Temperatura Mínima.	17
4.1. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Mensual para la Región Sureste de México.	21
4.2. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Mensual para la Región Sureste de México.	21
4.3. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Mensual para la Región Sureste de México.	22
4.4. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Anual para Primavera en la Región Sureste de México.	23
4.5. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Anual para Verano en la Región Sureste de México	23

LISTA DE FIGURAS

4.6. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Anual para Otoño en la Región Sueste de México	24
4.7. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura de Media Anual para Invierno en la Región Sureste de México	24
4.8. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Anual para Primavera en la Región Sureste de México.	25
4.9. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Anual para Verano en la Región Sureste de México.	25
4.10. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima para Otoño en la Región Sureste de México.	26
4.11. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Anual para Invierno en la Región Sureste de México.	26
4.12. Gráfica de la Tendencia de la Temperaturs Mínima Anual para Primavera en a Región Sureste de México.	27
4.13. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Anual para Verano en la Región Sureste de México.	27
4.14. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Anual para Otoño en la Región Sureste de México.	28
4.15. Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Anual para Invierno en la Región Sureste de México.	28
4.16. Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura en la Región Sureste de México.	29
4.17. Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Primavera en la Región Sureste de México.	30
4.18. Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Verano en la Región Sureste de México.	30

LISTA DE FIGURAS

4.19. Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Otoño en la Región Sureste de México.	31
4.20. Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Invierno en la Región Sureste de México.	31

Capítulo 1

Introducción

El cambio climático que se registra actualmente, a causa del incremento de gases de efecto invernadero, es una de las preocupaciones más importantes para la comunidad científica y para la sociedad. En las últimas décadas, el clima mundial se ha caracterizado por el incremento de condiciones extremas como sequías, inundaciones, tormentas severas y olas de calor o frío, entre otros. Asimismo, muchos países están experimentando regionalmente procesos de tropicalización y desertificación, así como un cambio en el régimen de lluvia, factores que afectan directamente a sus economías. Para poder evaluar estas manifestaciones se requiere conocer muy a detalle el clima y su variabilidad, afortunadamente, en los últimos años, se ha avanzado mucho en la comprensión y modelación del sistema climático; por ejemplo, se han desarrollado Modelos de Circulación General de Atmósfera y Océano (MCGAO) que permiten realizar proyecciones del clima cada vez más certeras.

En México, las actividades agropecuarias tienen una gran importancia como fuente de ingresos y proveedoras de alimentos, sobre todo en el sector rural. La producción agropecuaria es muy sensible al cambio climático, algunos ejemplos de los impactos más importantes previstos para el sector agropecuario con relación a la variación de la temperatura son la disminución de rendimientos de los cultivos en medios más cálidos debido al estrés causado por el calor, el aumento de plagas y enfermedades, el aumento de incendios, la reducción en el suministro de agua, problemas de calidad del agua y la presencia de plagas en lugares donde antes no existían. En cuanto a los fenómenos extremos como las sequías, las lluvias extremas, las granizadas y los ciclo-

1. Introducción

nes se tienen previstos daños severos a los cultivos, erosión del suelo, imposibilidad para cultivar por saturación hídrica de los suelos, efectos adversos en la calidad del agua, estrés hídrico y aumento de la muerte del ganado, entre otros ?.

La Comisión Intersecretarial de Cambio Climático define al cambio climático como *la modificación del clima con respecto al historial climático a una escala global o regional. Tales cambios se producen a muy diversas escalas de tiempo y sobre todos los parámetros meteorológicos: temperatura, presión atmosférica, precipitaciones, nubosidad, etc. En teoría, el cambio climático se debe tanto a causas naturales como antropogénicas.*

En la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre Cambio Climático se definió al cambio climático como un *cambio de clima atribuido directa o indirectamente a la actividad humana, que altera la composición de la atmósfera mundial y que se suma a la variabilidad natural del clima observada durante períodos de tiempo comparables.*

Si bien la cuantificación de los efectos del cambio climático puede variar a medida que se disponga de mayor información climatológica, las tendencias recientes hacen suponer que es indispensable que se continúen con los trabajos para mitigar los impactos futuros y que permitan una mejor adaptación hacia los escenarios futuros. Diversos estudios sugieren que el diagnóstico de la vulnerabilidad a la variabilidad climática es el primer paso para planear la adaptación al cambio climático, por ejemplo, ?; ? y ? señalan que el diagnóstico de la vulnerabilidad a la variabilidad climática debe ser seguido de una valoración de los riesgos climáticos, considerando los escenarios del cambio climático, y posteriormente, definir las estrategias de adaptación.

Existe una gran cantidad de modelos climáticos en todo el mundo los cuales se diferencian entre sí por su resolución, tiempo de predicción y escala (regional o global), así como por la capacidad del sistema de cómputo que los ejecuta. Durante los últimos años ha habido un creciente interés en modelar la tendencia de la temperatura. Varios estudios, por ejemplo: ?, que para explicar la tendencia de la temperatura en Reino Unido, proponen un modelo semi-paramétrico de panel lineal en donde existe un componente de tendencia el cual evoluciona de forma no paramétrica; por su parte

1. Introducción

? centran su atención en el ajuste de tendencias no-paramétricas en temperaturas de Inglaterra Central.

Dada la complejidad del estudio del cambio climático, el interés del presente trabajo se centra en estimar el componente de tendencia de la temperatura ambiental de la región sureste de México mediante modelos flexibles como la Regresión Polinomial Local; se tienen los siguientes objetivos:

- Modelar la tendencia de las temperaturas media máxima y mínima mediante regresión no-paramétrica para averiguar si existe evidencia de un cambio en el clima de la región Sureste de México.
- Modelar la tendencia del rango de la temperatura para investigar si hay evidencia estadística de que las temperaturas se han vuelto más extremas en la región bajo estudio.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta la teoría de Regresión Polinomial Local como un método para la estimación de la tendencia de la temperatura. En el Capítulo 3 se describen los datos que se emplearon en la investigación, así como la metodología del proceso de regresión no-paramétrica. En el Capítulo 4 se presentan los resultados de la metodología empleada para estimar la tendencia de la temperatura en la Región Sureste de México. Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones sobre el análisis de las tendencias extraídas para los diferentes escenarios.

Capítulo 2

Regresión No-paramétrica

2.1. Antecedentes

Considérese el planteamiento de un problema de regresión, habitualmente especificado como sigue:

Sea un conjunto de n pares de observaciones $\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n\}$ que satisfacen el siguiente modelo:

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

donde los residuos ε_i son variables aleatorias independientes (v.a.i.) con media cero y varianza σ^2 y la función m es desconocida y se define como la función de regresión, $m(x) = E[Y | X = x]$.

Este planteamiento corresponde a un modelo de regresión de tipo univariante y con tal planteamiento, el interés se centra en explorar y representar la relación existente entre la variable explicativa X y la variable dependiente Y , predecir el comportamiento de Y para valores de la variable X aún no observados y estimar las derivadas de la función $m(x)$. Para alcanzar tales objetivos existen dos aproximaciones diferentes: asumir un modelo paramétrico para la función de regresión o un modelo no-paramétri-

2.2. Modelo de Regresión No-paramétrica

co el cual asume que la función de regresión presenta algunas propiedades deseables generalmente relacionadas con las derivadas de la función $m(x)$.

La primera aproximación corresponde a lo que se denomina Regresión Paramétrica y supone que la función de regresión desconocida $m(x)$ pertenece a alguna familia paramétrica de funciones. Por contraposición, a la segunda aproximación se le denomina Regresión No-paramétrica y la única restricción que se le impone a la función $m(x)$ es que sea suave, entendiendo esta suavidad en términos de derivadas. En este último sentido a estos métodos también se les suele denominar métodos de suavizamiento o suavizado.

2.2. Modelo de Regresión No-paramétrica

La regresión paramétrica busca estimar un conjunto de parámetros que mejor se ajusten a los datos para una predeterminada familia de funciones. En muchos casos, este método resulta en modelos fácilmente interpretables, que hacen un excelente trabajo al momento de explicar la variación en los datos. Sin embargo, la familia de funciones elegida puede ser excesivamente restrictiva para algunos tipos de datos. ? presentan ejemplos en donde incluso un polinomio de 4to orden falla al momento de dar un ajuste visual adecuado; se pueden intentar ajustes de orden superior, pero conduce a inestabilidad numérica por lo que métodos alternativos son deseables en ciertos casos.

La teoría y los métodos de suavizamiento o regresión no-paramétrica han cobrado un gran auge en las últimas décadas; la principal razón por la cual se ha generado un creciente interés por esta metodología se deriva de la necesidad de buscar planteamientos no-paramétricos que aporten la flexibilidad necesaria para la estimación de las curvas que aparecen en la práctica.

Un primer método para superar estos problemas fue el estimador Nadaraya-Watson propuestos independientemente por ? y ?. Para encontrar un estimador para algunas funciones, $m(x)$, se toma un promedio simple ponderado, donde la función de

2.3. Regresión Polinomial Local

ponderación es típicamente una densidad de probabilidad simétrica y se refiere a una función tipo Kernel. Dichos estimadores, también llamados estimadores tipo núcleo se han ido refinando y perfeccionando dentro de los denominados métodos de regresión polinomial local, convirtiéndose en uno de los métodos más empleados por diversos analistas en la actualidad.

? plantea lo siguiente: *Supongamos que la función de regresión desconocida $m(x)$ es suave, entonces podemos esperar que las observaciones tomadas en puntos próximos a uno dado x , puedan darnos información del vector de dicha función en x .* Con este planteamiento se trata de definir unas bandas centradas en cada punto y de ancho h , y calcular la estimación en el punto utilizando sólo las observaciones que caen dentro. Además, para obtener la curva de regresión estimada, la banda definida por el parámetro h , recorrerá todos los datos de izquierda a derecha. Por tanto, se han desarrollado diversas técnicas, entre las que destacan, estimadores tipo núcleo, suavizamiento por splines, regresión polinomial local, entre otros.

La presente investigación se desarrolla, empleando el método de regresión polinomial local, procedimiento que está implementado en programas estadísticos y lenguajes de programación como S-Plus, MathLab y R, por lo que en las siguientes secciones se describe más a detalle el procedimiento de regresión polinomial local desde el punto de vista teórico.

2.3. Regresión Polinomial Local

En la regresión polinomial local, una regresión de mínimos cuadrados ponderados de orden inferior ajusta a cada punto de interés en x empleando datos de alguna vecindad alrededor de x . Siguiendo la notación de ?, sean (X_i, Y_i) un conjunto de pares ordenados tal que:

$$y_i = m(x_i) + \sigma(x_i)\epsilon_i \tag{2.2}$$

2.3. Regresión Polinomial Local

donde $m(x_i)$ es una función suave pero se desconoce, $\epsilon_i \sim N(0, 1)$, σ^2 es la varianza de y_i en el punto x_i y x_i tiene alguna distribución f .

El objetivo es estimar a la función $m(x_i)$ y una de las formas de estimarla es usando regresión polinomial local; para ello, se supone que la función de regresión $m(x)$ tiene p derivadas en un punto x_0 , entonces vía teorema de Taylor tenemos una aproximación de este tipo para los valores en un entorno de x_0 :

$$m(x) \approx m(x_0) + m'(x_0)(x - x_0) + \frac{m''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{m^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p. \quad (2.3)$$

Es decir, se justifica que se puede aproximar localmente $m(x)$ por funciones polinómicas de grado p

$$m(x) = \sum_{k=0}^p \beta_k (x - x_0)^k, \quad (2.4)$$

donde $\beta_k = \frac{m^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, \dots, p$.

De esta manera se obtienen estimaciones de los coeficientes $\hat{\beta}_k$ con $j = 0, \dots, p$ y observando la expresión (2.3), es posible notar que la estimación del término independiente $\hat{\beta}_0$ será un estimador de $m(x)$ en x_0 y el resto de los coeficientes $\hat{\beta}_j$ proporcionarán estimaciones de sus derivadas.

Con el fin de estimar $m(x)$ localmente mediante polinomios de grado p se considera un problema de mínimos cuadrados ponderados:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n K_h(x_i - x_0) \left[Y_i - \sum_{k=0}^p \beta_k (x_i - x_0)^k \right]^2 \quad (2.5)$$

donde h es un parámetro denominado ancho de banda o parámetro de suavizamiento

2.3. Regresión Polinomial Local

que controla el tamaño de la vecindad alrededor de (x_0) ; $K_h(u) = h^{-1}K(\frac{u}{h})$ donde la función $K(\cdot)$, se denomina función núcleo, dicha función define las ponderaciones que se asignan a cada observación en el entorno local considerado, habitualmente se supone una densidad simétrica y p es el grado del ajuste polinomial local. Como caso práctico se puede obtener el conocido estimador núcleo de Nadaraya-Watson, que supone realizar ajustes polinomiales de grado cero y cuando el ajuste polinomial es de grado uno, se obtiene el denominado estimador lineal local.

A menudo, resulta simple emplear una notación matricial para escribir el problema de mínimos cuadrados ponderados; por lo tanto sea X la matriz diseño empleada centrada en x_0 :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 - x_0 & \dots & (X_1 - x_0)^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_n - x_0 & \dots & (X_n - x_0)^p \end{bmatrix}$$

y sea W la matriz diagonal de pesos tal que $W = \text{diag}\{K(\frac{x_1-x_1}{h}), \dots, K(\frac{x_n-x_1}{h})\}$; entonces, el problema de minimización es:

$$\underset{\beta}{\text{argmin}}(Y - X\beta)^T W(Y - X\beta), \quad (2.6)$$

donde $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

La ecuación (2.6) es equivalente a (2.5), entonces la solución al problema de minimización es:

$$\hat{\beta} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y. \quad (2.7)$$

2.3. Regresión Polinomial Local

Por lo tanto, la estimación de la función $m(x_i)$ está dada por:

$$m_i = e_1^T (X^T W X)^{-1} X^T W Y, \quad (2.8)$$

donde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ y m_i está bien definida siempre y cuando $X^T W X$ sea invertible.

Existen tres parámetros cuya elección puede tener un efecto en la calidad del ajuste de la regresión y estos son el ancho de banda h , el orden del polinomio local a ser ajustado p y la función núcleo o kernel K .

2.3.1. Selección del Ancho de Banda

El ancho de banda h se define como un parámetro positivo cuyo rango será la amplitud del intervalo de estimación. La elección del ancho de banda h es de gran importancia para el análisis de regresión polinomial local. Las buenas propiedades del estimador resultante dependerán en gran medida de la elección que se haga en dicho parámetro, si el ancho de banda es muy pequeño, entonces las observaciones que están muy próximas al ancho de banda intervendrán en el cálculo del estimador describiendo de manera adecuada los comportamientos locales, pero se obtendría una curva estimada muy variable. Por el contrario, si el ancho de banda es muy grande, las estimaciones se verán afectadas por observaciones en puntos muy alejados de forma que difícilmente se podrán recoger los comportamientos locales, dando lugar a grandes sesgos y como consecuencia se obtendrá poca variabilidad.

Desde el punto de vista teórico, la elección del ancho de banda tendrá que buscar una adecuada compensación entre sesgo y varianza; desde el punto de vista práctico supondrá la elección de la complejidad del modelo. Algo similar ocurre con la elección del grado de los ajustes polinomiales; es decir, la utilización de ajustes de grado cero o uno darán estimaciones con poca variabilidad, muy suaves, pero con sesgos elevados.

2.3. Regresión Polinomial Local

Por el contrario, cuando los ajustes son con grados mayores (dos o tres) se obtendrán menores sesgos pero mayor varianza.

Una forma de natural de elegir un ancho de banda adecuado y equilibrar la compensación entre sesgo y varianza, es minimizar el Error Cuadrado Medio (MSE). En la configuración de la regresión polinomial local, se debe elegir entre encontrar un ancho de banda óptimo para toda la gama de datos o elegir un ancho de banda que sea óptimo en cada punto y que varíe dependiendo de x , esto último se refiere a un ancho de banda variable.

Integrando el MSE sobre el espacio de parámetros da una expresión para el Error Cuadrado Medio Integrado (MISE). Minimizar el MISE es un método común para elegir un ancho de banda óptimo. Estimar el mínimo de h_{opt} puede hacerse empíricamente usando Validación Cruzada (CV) o asintóticamente usando expresiones para el sesgo y varianza asintótica. En la presente investigación se hablará sólo del método de CV dejando uno fuera que simplemente elige el valor para h que minimice el error CV.

? describen el método de Validación Cruzada dejando uno fuera para estimar h . Para encontrar un estimador para el ancho de banda global se minimiza:

$$\sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{m}_{-j}(X_j))^2 \quad (2.9)$$

donde $\hat{m}_{-j}(X_j)$ denota la función de media estimada dejando fuera el término j -ésimo.

2.3.2. Selección del Grado del Polinomio

Además de elegir un ancho de banda apropiado, también es importante elegir el orden apropiado del polinomio a ajustar. Polinomios de orden superior aumentan la precisión del ajuste, es decir, el sesgo será menor, pero a medida que el orden incrementa la varianza también incrementa. Sin embargo, este crecimiento no es constante, la

2.3. Regresión Polinomial Local

varianza de $\hat{m}(x)$ sólo incrementa siempre que p pasa de impar a par. No hay pérdida al pasar de $p = 0$ a $p = 1$, pero al pasar de $p = 1$ a $p = 2$ incrementará la varianza, esto sugiere considerar sólo polinomios de orden impar dado que la ganancia en el sesgo parece no tener costo asociado a la varianza.

2.3.3. Selección de la Función Kernel

De acuerdo con ? los estimadores Kernel son estimadores lineales en el sentido de que se puede expresar el valor del estimador en cualquier punto x como una suma ponderada de las respuestas. La función núcleo define la forma en que los pesos se asocian a cada observación dentro de la banda definida y por tanto determina su importancia en el cálculo de la estimación. Para dicha función es habitual el uso de alguna de las siguientes densidades:

- Triangular $K(u) = (1 - |u|)1_{|u| \leq 1}$.
- Epanechnikov: $K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2)1_{|u| \leq 1}$.
- Biponderado: $K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2 1_{|u| \leq 1}$.
- Gaussiano: $K(u) = (2\pi)^{-1} \exp(-\frac{u^2}{2})(1 - u^2)^2 1_{|u| \leq 1}$.

En la práctica, la elección del núcleo no afecta al buen comportamiento de las estimaciones resultantes, por lo que considerar una función u otra atiende fundamentalmente razones técnicas.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Área de Estudio y Fuente de Información

La modelación de la tendencia de la temperatura se realizó en la región sureste de México debido a que ésta es una de las regiones de México que más se ha visto afectada por variaciones climatológicas. El área de estudio se encuentra entre los $14^{\circ}37'4.8''$ y $19^{\circ}44'34.8''$ latitud Norte y entre los $96^{\circ}54'21.6''$ y $89^{\circ}8'38.4''$ longitud Oeste.

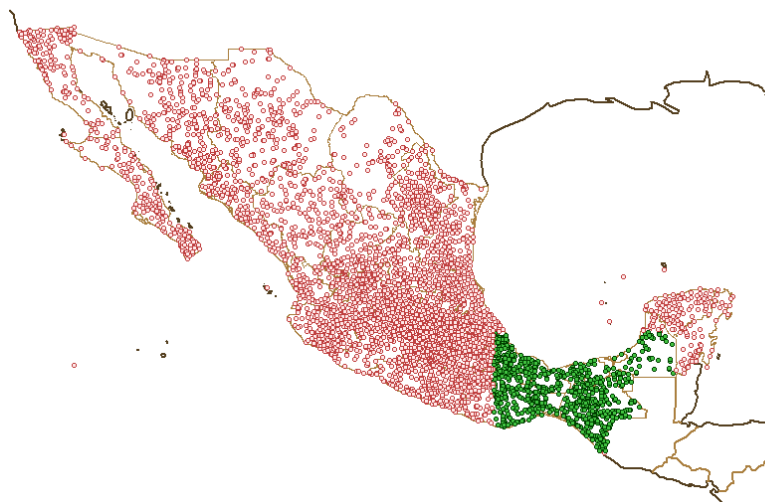


Figura 3.1: Área de estudio – Región Sureste de México

3.2. Selección del Grado del Polinomio

Los datos fueron obtenidos del Extractor Rápido de Información Climatológica (ERIC), el cual es una base de datos climatológicos construida con información proporcionada por la Comisión Nacional del Agua a través de la Coordinación General del Servicio Meteorológico Nacional. La información contenida en el ERIC es dada por estaciones climatológicas. Una vez seleccionada el área de estudio, se seleccionaron las estaciones climatológicas que registraran una altitud menor o igual a los 500 metros sobre el nivel del mar. Los datos que se seleccionaron del ERIC incluyen temperaturas medias, máximas y mínimas mensuales para el área de estudio a partir de enero de 1921 hasta diciembre de 2012.

Para llevar a cabo el análisis de regresión polinomial local, se construyeron series de temperaturas medias mensuales y anuales a partir de la información proporcionada por el ERIC. Las series comprenden datos de temperatura media, máxima y mínima de estaciones climatológicas ubicadas entre los 0 y 500 metros de altitud, esto con el objetivo de tener cierta homogeneidad en los datos y evitar que datos de temperatura de estaciones ubicadas a una altitud mayor a los 500 metros sesgaran la información pues a mayor altitud menor temperatura.

3.2. Selección del Grado del Polinomio

La realidad completa no se puede incluir en un modelo, por tanto, buscamos un buen modelo para aproximar los efectos respaldados por los datos del fenómeno observado. La selección de un modelo adecuado de aproximación es fundamental para la inferencia estadística de muchos tipos de datos empíricos y el criterio de información de Akaike (AIC) es uno de los criterios de uso frecuente para la selección de dicho modelo.

A través del tiempo, el uso del criterio de AIC para la selección de modelos ha crecido significativamente. De acuerdo con ? algunas de las aplicaciones del criterio de AIC se encuentran en problemas relacionados con la estimación de dimensionalidad en un modelo; estos problemas pueden ocurrir de varias formas como: la estimación del número de factores en análisis factorial, la estimación del grado de polinomio que describe los datos, la selección de variables a ser incluidas en una ecuación de regre-

3.2. Selección del Grado del Polinomio

sión múltiple o la estimación del orden de un modelo autorregresivo o un modelo de promedios móviles de series de tiempo.

El presente trabajo hace uso del criterio de AIC para la selección del grado de polinomio p en el modelo de regresión y se selecciona el modelo que tenga el menor AIC. La Tabla 3.1 concentra los diferentes valores del AIC correspondientes a modelos de regresión con polinomio de grado $p = 1$, $p = 2$ y $p = 3$.

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
Temperatura Media Mensual	4620.672	4620.880	4619.018
Temperatura Máxima Mensual	1873.555	4866.025	4867.969
Temperatura Mínima	4575.651	4571.804	4568.787
Primavera Media Anual	188.7889	190.4889	190.0696
Verano Media Anual	136.3713	137.5015	138.182
Otoño Media Anual	125.5308	126.7514	113.1885
Invierno Media Anual	191.7626	175.5935	174.2514
Primavera Máxima Anual	206.0733	199.8690	201.7362
Verano Máxima Anual	180.3317	172.4713	171.4811
Otoño Máxima Anual	191.2134	183.2010	183.5547
Invierno Máxima Anual	229.4683	226.6047	228.5230
Primavera Mínima Anual	161.1742	160.9069	152.6429
Verano Mínima Anual	139.5873	138.7065	124.6856
Otoño Mínima Anual	128.0972	126.6382	126.4772
Invierno Mínima Anual	205.1106	188.9374	189.7857

Tabla 3.1: Valores del AIC para la selección del grado del polinomio p para el ajuste de Regresión Polinomial Local.

Al comparar los diferentes valores del AIC correspondientes a los tres diferentes modelos de regresión, la ganancia al elegir un modelo de regresión con polinomio de grado 1 contra elegir un modelo de regresión de grado 3 no es significativa; es decir, si comparamos el AIC del modelo de regresión polinomial con $p = 1$ versus el modelo de regresión con $p = 3$ para la temperatura media mensual es posible notar que el AIC para el modelo con $p = 3$ es muy similar al $p = 1$.

Es importante tener en cuenta que siempre que se selecciona un modelo, se debe mantener un sentido de parsimonia, esto es, se debe usar el modelo más simple ya que un

3.3. Selección del Ancho de Banda

modelo sobreajustado complica la estimación y cálculo de los resultados, es por ello se opta por el modelo lineal $p = 1$ para realizar el ajuste de la regresión polinomial local.

3.3. Selección del Ancho de Banda

Como ya se mencionó en secciones anteriores, la selección del ancho de banda, h , es crucial para el ajuste de regresión local polinomial. La selección del ancho de banda o parámetro de suavizamiento se realizó mediante la función *CVbw* de la paquetería *Kerdiest* (?) del programa R (?).

El paquete *Kerdiest* ha sido diseñado para el cálculo de estimadores Kernel de la función de distribución; también el problema de selección del ancho de banda ha sido considerado, por lo que se ha implementado el método de Validación Cruzada para la selección del parámetro de suavizamiento ?.

El método de CV propuesto por ? consiste en minimizar la siguiente función:

$$CV(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (I(x - x_i) - \hat{F}_{-i}(x))^2 dx, \quad (3.1)$$

donde $I(x - x_i) = 1$ si $x - x_i \geq 0$ o 0 de otro modo (ver ? y ?) para mayor información.

Se empleó la función *CVbw* de la paquetería *Kerdiest* del paquete estadístico R para determinar el ancho de banda a usar para realizar el análisis de regresión polinomial local y estimar la tendencia de la temperaturas media máxima y mínima. Las Figuras 3.2, 3.3, 3.4, presentan las gráficas de CV en las cuales se muestran un mínimo global en $h = 2$, $h = 3$ y $h = 2$ para las temperaturas media, máxima y mínima respectivamente.

Las Tablas 3.2 y 3.3 muestran los anchos de banda seleccionados con la función *CVbw*

3.3. Selección del Ancho de Banda

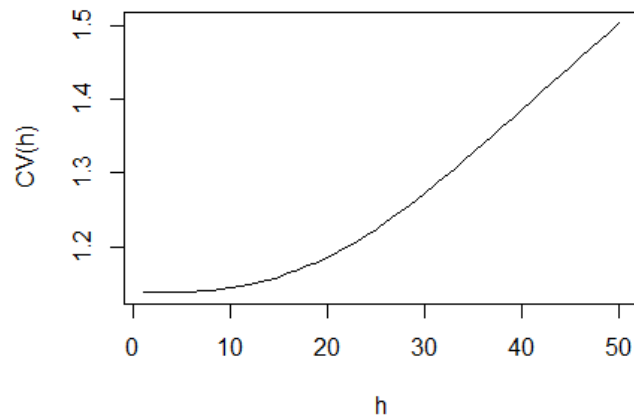


Figura 3.2: Gráfica de Validación Cruzada para seleccionar el ancho de banda h para estimar la Tendencia de la Temperatura Media.

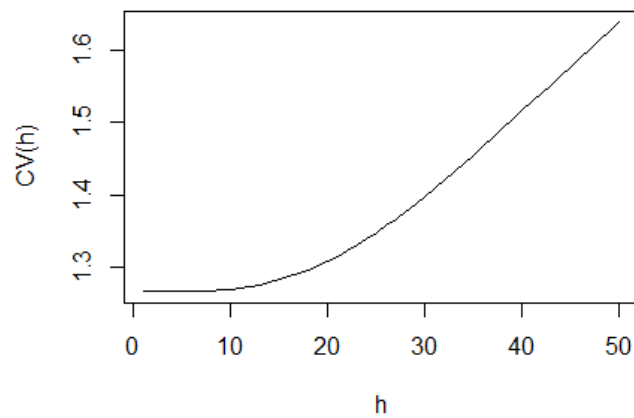


Figura 3.3: Gráfica de Validación Cruzada para seleccionar el ancho de banda h para estimar la Tendencia de la Temperatura Máxima.

por estación y para los datos de temperatura media, máxima y mínima anual, así como para el rango de la temperatura, respectivamente.

3.3. Selección del Ancho de Banda

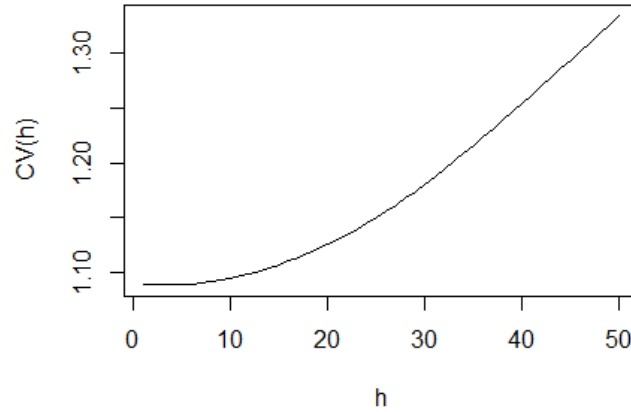


Figura 3.4: Gráfica de Validación Cruzada para seleccionar el ancho de banda h para estimar la Tendencia de la Temperatura Mínima.

Estación	Temperatura Anual (Grados Celsius)		
	Media	Máxima	Mínima
Primavera	$h = 5$	$h = 5$	$h = 7$
Verano	$h = 3$	$h = 6$	$h = 6$
Otoño	$h = 6$	$h = 9$	$h = 6$
Invierno	$h = 6$	$h = 8$	$h = 6$

Tabla 3.2: Anchos de Banda para las Temperaturas Media, Máxima y Mínima Anual para cada una de las estaciones del año.

	Ancho de banda
Rango de la Temperatura Mensual	$h = 3$
Rango de la Temperatura Primavera Anual	$h = 8$
Rango de la Temperatura Verano Anual	$h = 5$
Rango de la Temperatura Otoño Anual	$h = 5$
Rango de la Temperatura Invierno Anual	$h = 9$

Tabla 3.3: Anchos de Banda para el Rango de la Temperatura.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

A continuación se presentan los resultados del ajuste de regresión polinomial local para la estimación de la tendencia de la temperatura media, máxima y mínima para la Región Sureste de México. Además se presentan los resultados de la estimación de la tendencia de la temperatura por estaciones del año. Para estimar la tendencia de la temperatura se empleó la función *locply* de la paquetería *KernSmooth* (?) del paquete estadístico ?.

Así mismo, mediante el modelo de regresión lineal $temp = \beta_{0j} + \beta_{1j}year + \epsilon_j$ se estimaron los coeficientes β_{1j} para determinar si la tendencia de la temperatura que se observa en cada una de las gráficas es significativa. La Tabla 4.1 resume los resultados sobre las pruebas de significancia para cada uno de los coeficientes β_{1j} que avalan la significancia de los resultados obtenidos sobre las tendencia de la temperatura. Para probar la significancia de la tendencia se probaron los siguientes juegos de hipótesis:

$$H_0 : \beta_{ij} = 0$$

vs

$$H_1 : \beta_{ij} \neq 0$$

donde $i = 0, 1$ y $j = 1, \dots, 20$.

4. Resultados y Discusión

β_{1j}	Estimación	Error Estándar	t-calculado	p-value	R^2
Temperatura Media Mensual ($\beta_{1,1}$)	-0.015655	0.002219	-7.055	$3.03 e - 12^{***}$	0.04321
Temperatura Máxima Mensual ($\beta_{1,2}$)	0.011757	0.002488	4.725	$2.6 e - 06^{***}$	0.01986
Temperatura Mínima Mensual ($\beta_{1,3}$)	-0.008588	0.002174	-3.95	$8.31 e - 05^{***}$	0.01396
Primavera Mínima Anual ($\beta_{1,4}$)	-0.008669	4.38996	-3.884	0.000196 ^{***}	0.1435
Verano Mínima Anual ($\beta_{1,5}$)	-0.009707	0.001985	-4.89	$4.38 e - 06^{***}$	0.2099
Otoño Mínima Anual ($\beta_{1,6}$)	-0.00689	0.001865	-3.695	0.000378 ^{***}	0.1317
Invierno Mínima Anual ($\beta_{1,7}$)	-0.008617	0.002834	-3.04	0.00309 ^{**}	0.09314
Primavera Media Anual ($\beta_{1,8}$)	-0.016641	0.002594	-6.416	$6.38 e - 09^{***}$	0.3138
Verano Media Anual ($\beta_{1,9}$)	-0.019196	0.001951	-9.841	$6.12 e - 16^{***}$	0.5183
Otoño Media Anual ($\beta_{1,10}$)	-0.014332	0.001839	-7.793	$1.09 e - 11^{***}$	0.4029
Invierno Media Anual ($\beta_{1,11}$)	-0.011958	0.002636	-4.537	$1.76 e - 05^{***}$	0.1861
Primavera Máxima Anual ($\beta_{1,12}$)	0.012799	0.002849	4.492	$2.09 e - 05^{***}$	0.1832
Verano Máxima Anual ($\beta_{1,13}$)	0.008679	0.002477	3.504	0.000717 ^{***}	0.12
Otoño Máxima Anual ($\beta_{1,14}$)	0.01154	0.002628	4.391	$3.07 e - 05^{***}$	0.1764
Invierno Máxima Anual ($\beta_{1,15}$)	0.014372	0.003235	4.442	$2.53e - 05^{***}$	0.1798
Rango Temperatura Mensual($\beta_{1,16}$)	0.020346	0.001454	14.00	$<2e - 16^{***}$	0.151
Rango Temperatura Anual Primavera ($\beta_{1,17}$)	0.021469	0.002654	8.09	$2.66e - 12^{***}$	0.421
Rango Temperatura Anual Verano ($\beta_{1,18}$)	0.018386	0.002906	6.328	$9.48e - 09^{***}$	0.3079
Rango Temperatura Anual Otoño ($\beta_{1,19}$)	0.01843	0.002795	6.594	$2.86e - 09^{***}$	0.3257
Rango Temperatura Anual Invierno ($\beta_{1,20}$)	0.022989	0.002876	7.993	$4.22e - 12^{***}$	0.4151
Códigos de Significancia ^{***} 0.001 ^{**} 0.05 [*] 0.1 ^{''} 1					

Tabla 4.1: Pruebas de Significancia de la tendencia en las temperaturas.

4.1. Tendencia de la Temperatura Media, Máxima y Mínima en la Región Sureste

Es importante aclarar que aunque los β_{ij} estimados son todos significativos, ya que los p-valores son todos muy cercanos a cero, los resultados del modelo de regresión lineal no son útiles para explicar y predecir la temperatura en la región de estudio pues el R^2 , mostrado en la última columna de la Tabla 4.1, asociado a cada uno de los modelos de regresión es muy bajo, lo que indica que la variable *year* no es suficiente para explicar la temperatura; para ello sería necesario incluir otras variables al modelo de regresión tales como niveles de contaminación en la región o cambios en la concentración de gases de efecto invernadero en la atmósfera, por mencionar algunas.

Las estimaciones de $\beta_{1,j}$ presentados en la Tabla 4.1 dan una idea acerca de los decrementos e incrementos de la temperatura a lo largo del tiempo; por ejemplo, la temperatura media disminuye en promedio 0.0156 ° C cada mes. Una interpretación similar puede hacerse para cada uno de los escenarios que se muestran en la Tabla 4.1.

4.1. Tendencia de la Temperatura Media, Máxima y Mínima en la Región Sureste

En este apartado se presentan los resultados sobre la estimación de la tendencia de la temperaturas media, máxima y mínima mensuales obtenidos con el modelo de regresión polinomial local (2.2).

Las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 presentan las gráficas de las series de temperaturas media, máxima y mínima mensuales y su componente de tendencia, respectivamente. Las tres Figuras muestran una tendencia creciente para las temperaturas durante el periodo de 1921 a 2012. Estos incrementos en la temperatura son consistentes con los valores positivos de $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$ y $\beta_{1,3}$ presentados en la Tabla 4.1 para la temperaturas media, máxima y mínima mensuales, respectivamente.

4.1. Tendencia de la Temperatura Media, Máxima y Mínima en la Región Sureste

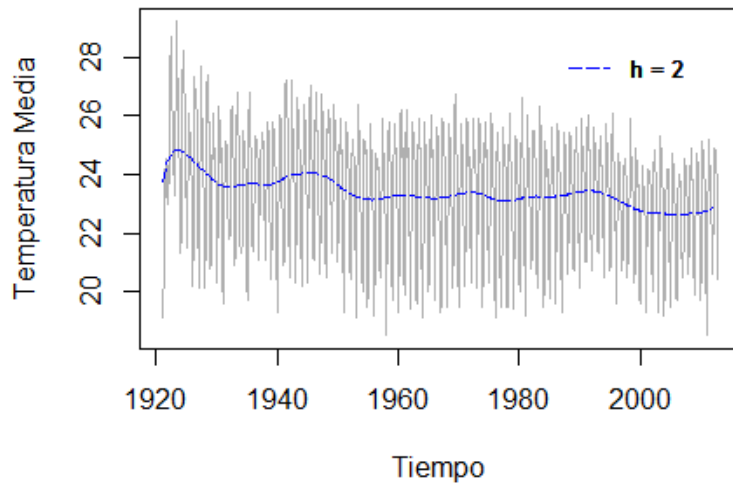


Figura 4.1: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Mensual para la Región Sureste de México.

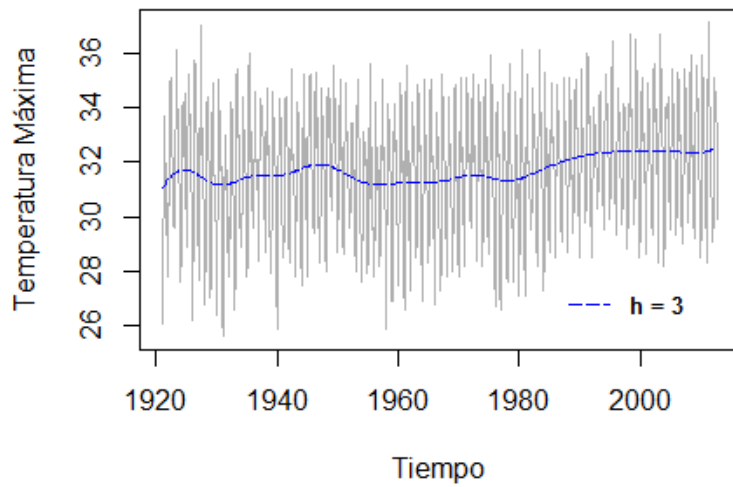


Figura 4.2: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Mensual para la Región Sureste de México.

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

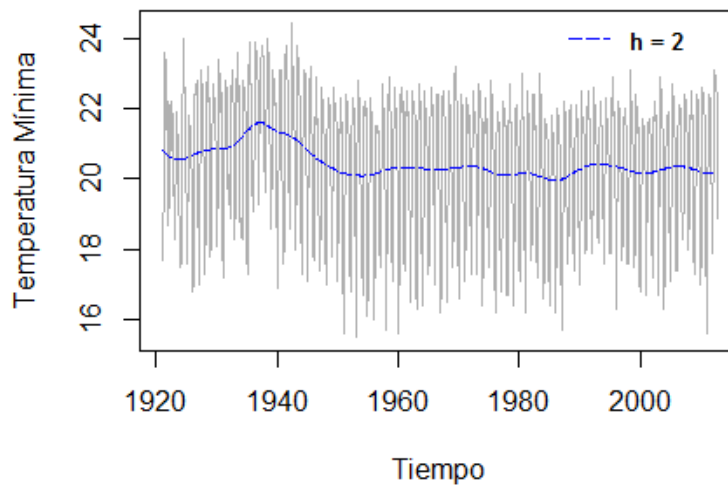


Figura 4.3: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Mensual para la Región Sureste de México.

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

En algunas ocasiones, se pueden observar con mayor claridad patrones en la tendencia cuando las series se modelan por estaciones del año. Con un análisis análogo como el descrito en las secciones anteriores, se presentan los resultados para la tendencia de la temperatura media, máxima y mínima anual para las diferentes estaciones del año. Se emplearon los anchos de banda h de la Tabla 3.2 para las temperaturas medias, máximas y mínimas anuales para las diferentes estaciones del año y con un grado de polinomio $p = 1$.

Las series de temperatura media anual para Primavera, Verano, Otoño e Invierno se muestran en las Figuras 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7. En general, es posible notar que la temperatura media anual para las cuatro estaciones del año presenta una tendencia decreciente. Estos decrementos en la tendencia de la temperatura son consistentes con los valores negativos de $\beta_{1,8}$, $\beta_{1,9}$, $\beta_{1,10}$ y $\beta_{1,11}$ presentados en la Tabla 4.1.

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

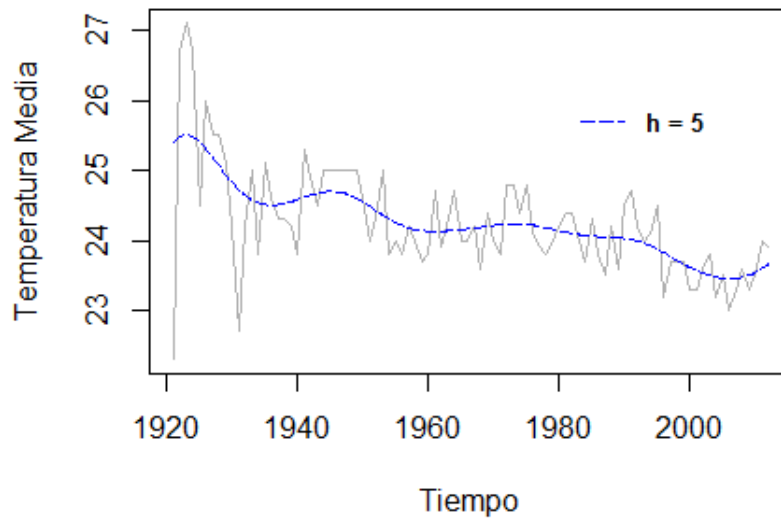


Figura 4.4: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Anual para Primavera en la Región Sureste de México.

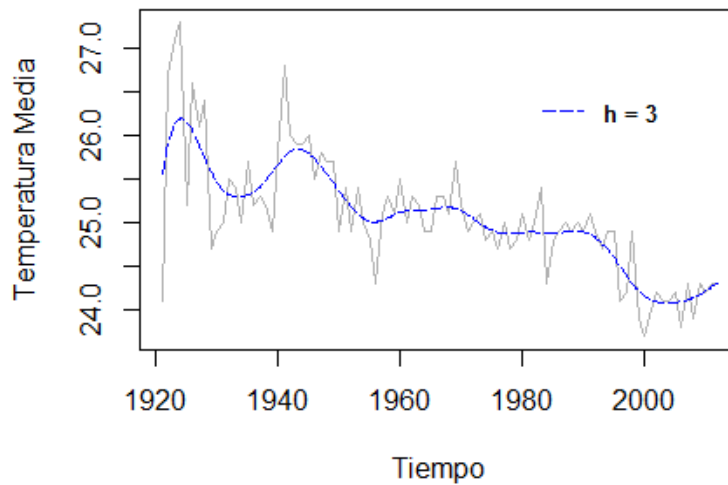


Figura 4.5: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Anual para Verano en la Región Sureste de México

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

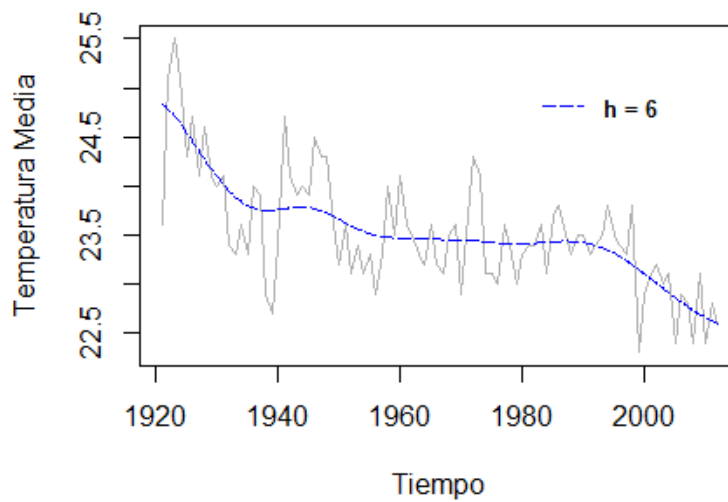


Figura 4.6: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Media Anual para Otoño en la Región Sureste de México

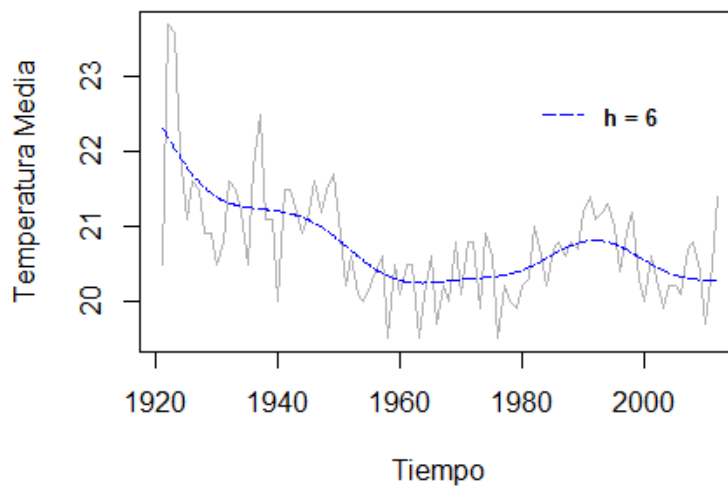


Figura 4.7: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura de Media Anual para Invierno en la Región Sureste de México

Las Figuras 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 corresponden a las series de temperatura máxima anual para las estaciones de Primavera, Verano, Otoño e Invierno, respectivamente;

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

en las figuras se puede apreciar una tendencia creciente para las cuatro estaciones del año, estas tendencias son consistentes con los valores positivos de $\beta_{1,12}$, $\beta_{1,13}$, $\beta_{1,14}$ y $\beta_{1,15}$ presentados en la Tabla 4.1.

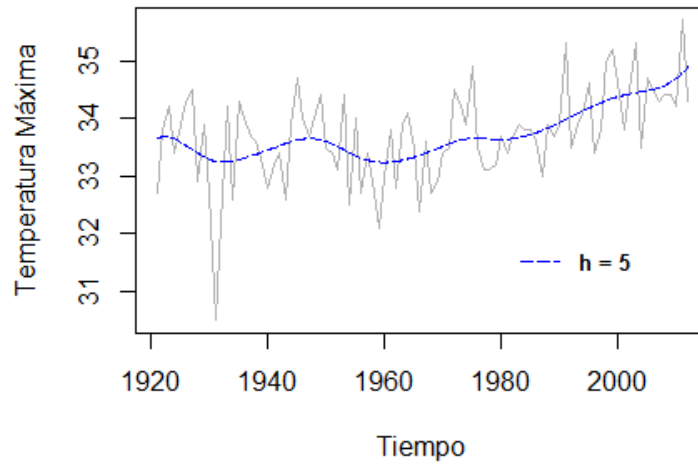


Figura 4.8: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Anual para Primavera en la Región Sureste de México.

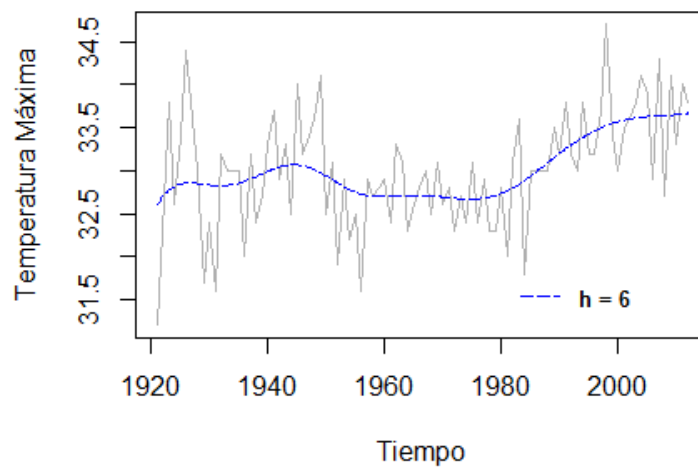


Figura 4.9: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Anual para Verano en la Región Sureste de México.

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

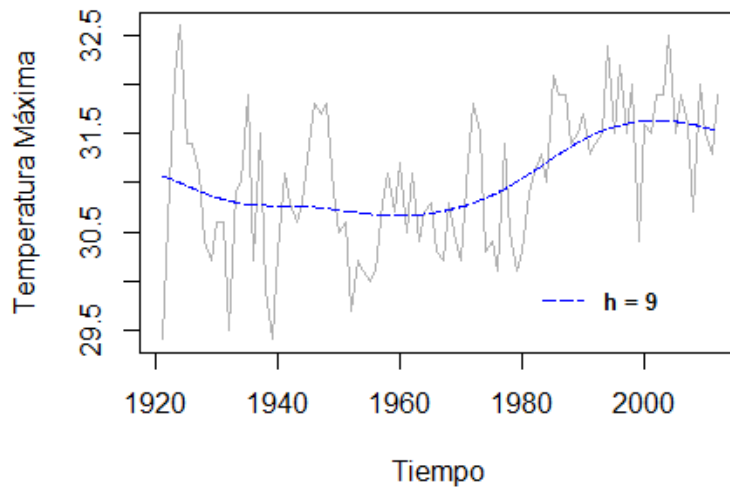


Figura 4.10: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima para Otoño en la Región Sureste de México.

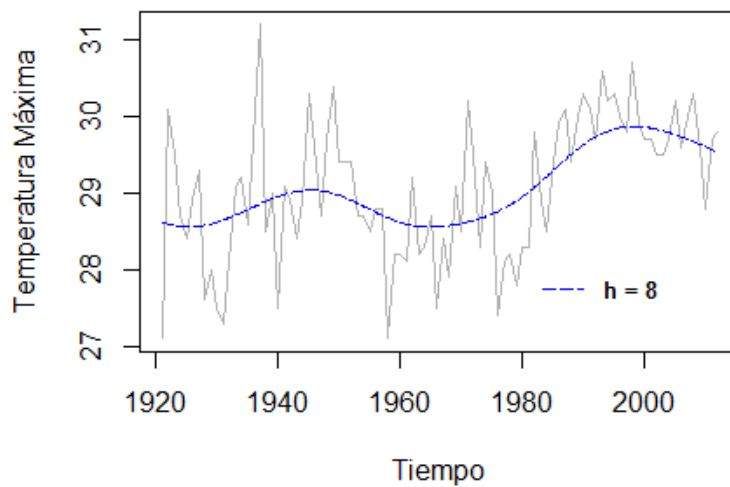


Figura 4.11: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Máxima Anual para Invierno en la Región Sureste de México.

Las Figuras 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15 corresponden a las series de temperatura mínima anual para las estaciones de Primavera, Verano, Otoño e Invierno, respectivamente.

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

Las cuatro Figuras muestran una tendencia decreciente de la temperatura mínima anual en la región, estos decrementos son en la tendencia son consistentes con los valores negativos de $\beta_{1,4}$, $\beta_{1,5}$, $\beta_{1,6}$, $\beta_{1,7}$ presentados en la Tabla 4.1.

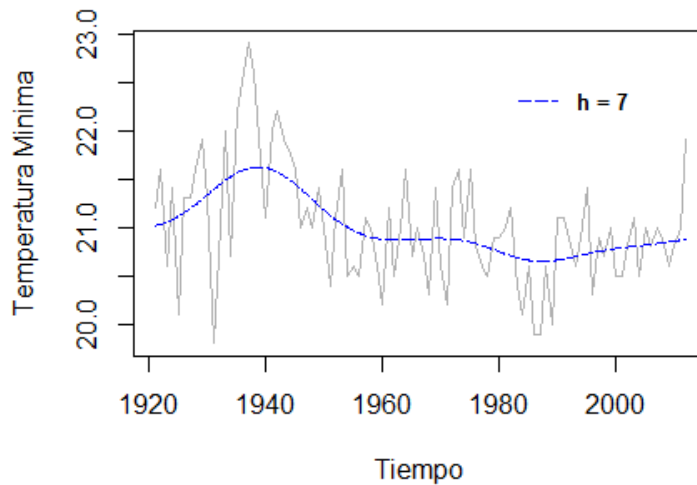


Figura 4.12: Gráfica de la Tendencia de la Temperaturs Mínima Anual para Primavera en a Región Sureste de México.

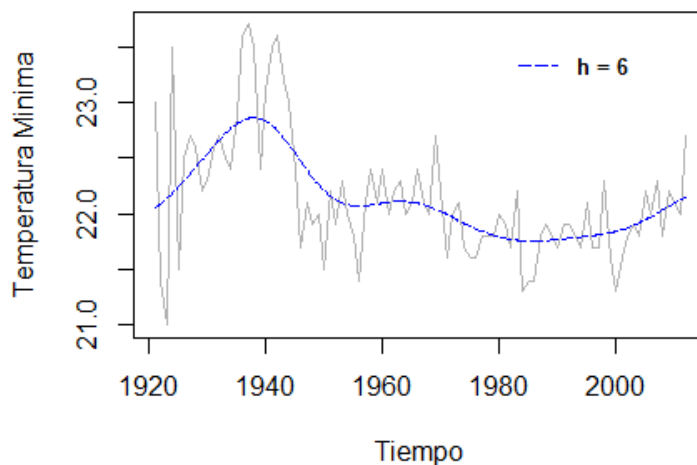


Figura 4.13: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Anual para Verano en la Región Sureste de México.

4.2. Modelación de la Tendencia de la Temperatura por Estaciones del Año

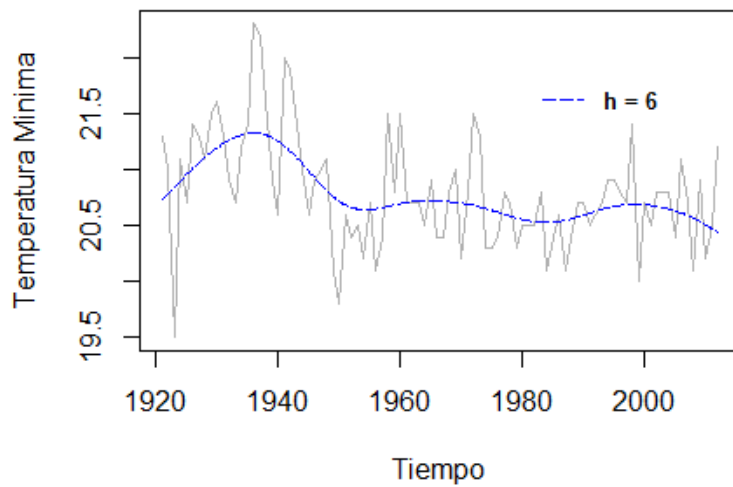


Figura 4.14: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Anual para Otoño en la Región Sureste de México.

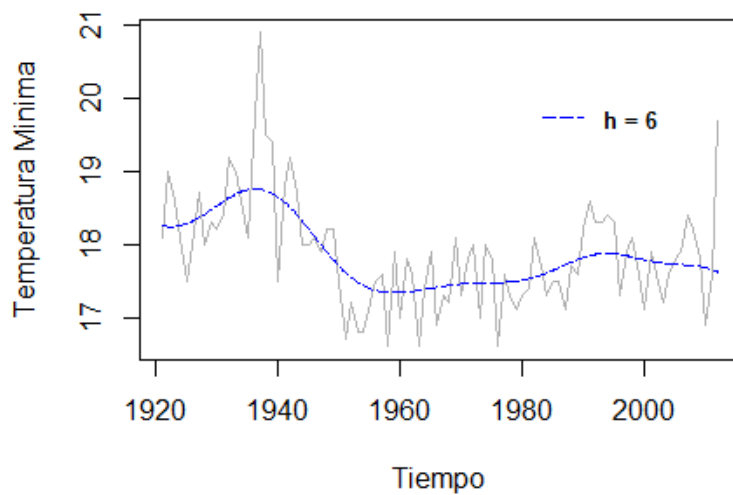


Figura 4.15: Gráfica de la Tendencia de la Temperatura Mínima Anual para Invierno en la Región Sureste de México.

4.3. Modelación de la Tendencia del Rango de la Temperatura

Con el objetivo de tener una idea más clara de la tendencia que sigue la temperatura en la Región Sureste de México se calculó el rango de la temperatura, el cual se define como la temperatura máxima menos la temperatura mínima, así como los rangos de las temperaturas en las estaciones de Primavera, Verano, Otoño e Invierno. Con el método de validación cruzada se encontraron los anchos de banda que se presentaron en la Tabla 3.3.

La Figura 4.16 que corresponde a la tendencia del rango de la temperatura en la región sureste durante el periodo de 1921 a 2012, la cual confirma un cambio en la tendencia de la temperatura global para la región de estudio. En general, en la Figura 4.16 se observa una tendencia claramente creciente para temperatura mensual en la región de estudio, este incremento es consistente con el valor positivo de $\beta_{1,16}$ presentado en la Tabla 4.1.

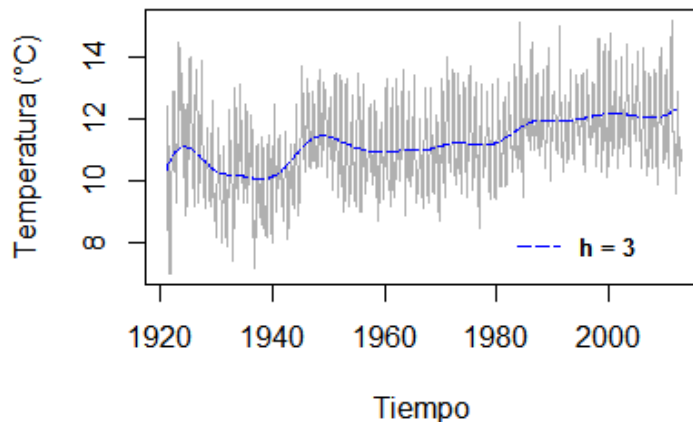


Figura 4.16: Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura en la Región Sureste de México.

Las Figuras 4.17, 4.18, 4.19 y 4.20 corresponden a la tendencia del rango de la temperatura anual para Primavera, Verano, Otoño e Invierno, respectivamente. En general,

4.3. Modelación de la Tendencia del Rango de la Temperatura

se observa que la temperatura presenta una tendencia creciente misma que es consistente con los valores positivos de $\beta_{1,17}$, $\beta_{1,18}$, $\beta_{1,19}$ y $\beta_{1,20}$, presentados en la Tabla 4.1. Estos valores que confirman la tendencia creciente del rango de la temperatura para la región Sureste de México durante el periodo de 1921 a 2012.

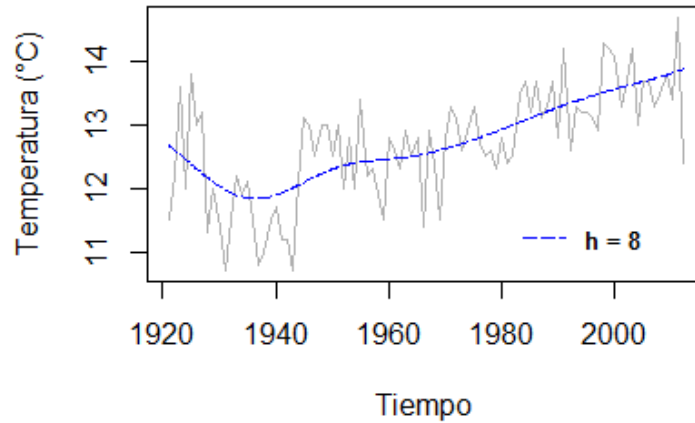


Figura 4.17: Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Primavera en la Región Sureste de México.

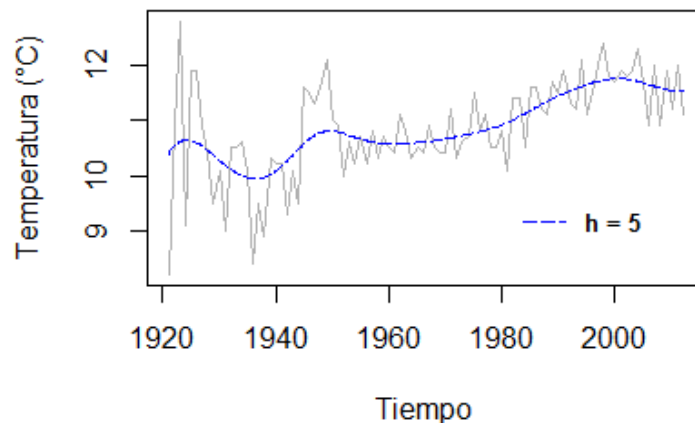


Figura 4.18: Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Verano en la Región Sureste de México.

4.3. Modelación de la Tendencia del Rango de la Temperatura

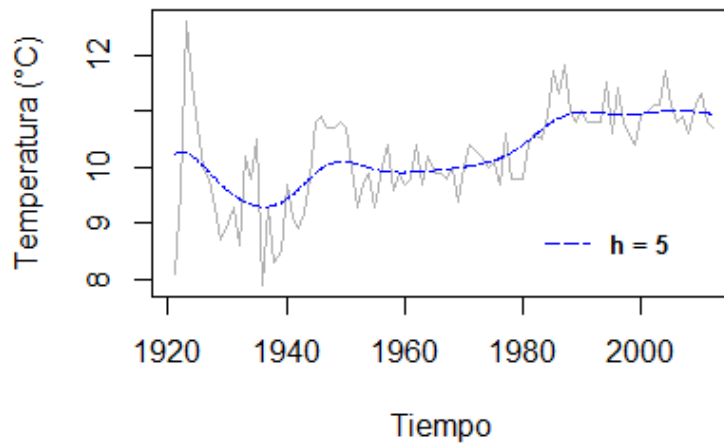


Figura 4.19: Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Otoño en la Región Sureste de México.

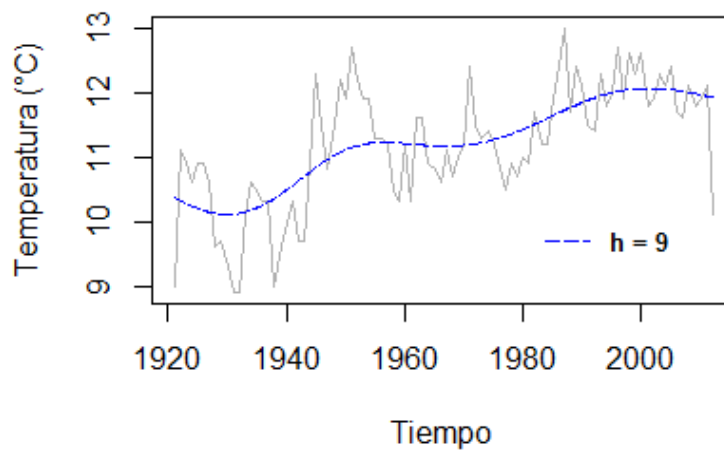


Figura 4.20: Gráfica de la Tendencia del Rango de la Temperatura para Invierno en la Región Sureste de México.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de la presente investigación es saber si la presencia de tendencia en las temperaturas media, máxima y mínima para la Región Sureste de México reflejan el fenómeno de cambio climático o si se trata simplemente de un efecto en la variabilidad natural de la temperatura. De acuerdo con los resultados de las temperaturas máximas y mínimas globales es posible pensar que el clima en la región de estudio se ha vuelto más extremo en los últimos 92 años pues las temperaturas mínimas han tenido una tendencia decreciente mientras que las temperaturas máximas han ido aumentando.

Estos cambios en la tendencia de la temperatura se observan mejor por estaciones del año, es decir, para las estaciones de Primavera y Verano el cambio en la tendencia de la temperatura fue mayor que para las estaciones de Otoño e Invierno; por su parte, el cambio en la tendencia de la temperatura mínima fue mayor en las estaciones de Otoño e Invierno que en Primavera y Verano.

Después del análisis de regresión polinomial local para el rango de las temperaturas globales y por estación, se concluye que existe evidencia de una tendencia general al alza de las temperaturas en la Región Sureste de México, lo que significa que el incremento en las temperaturas máximas ha sido mayor que el incremento en las temperaturas mínimas, es decir, se registra mayor presencia de calor que de frío en la región.

5. Conclusiones

Por último, los signos de los coeficientes estimados $\hat{\beta}_1$ confirman cada una de las tendencias presentes en las diferentes figuras y para todos los escenarios pues resultaron ser significativos ya que su p – *valor* asociado a cada $\hat{\beta}_{1j}$ es menor que 0.05; sin embargo, los modelos de regresión lineal mostrados a lo largo de la investigación no son los adecuados para explicar las temperaturas en la región de estudio pues es necesario contemplar otras variables explicativas debido a que los valores del coeficiente de determinación de estos modelos son muy bajos.

Apéndice

Apéndice A: Códigos de Programas en R para seleccionar el grado del polinomio mediante el Criterio AIC

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA LA TEMPERATURA MEDIA ###
```

```
fitmedia1<- lm(temp_media ~ Year)
fitmedia2<- lm(temp_media ~ Year + I(Year^2))
fitmedia3<- lm(temp_media ~ Year + I(Year^2) + I(Year^3))
```

```
AIC(fitmedia1)
AIC(fitmedia2)
AIC(fitmedia3)
```

```
summary(fitmedia1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA LA TEMPERATURA MÁXIMA ###
```

```
fitmaxima1<- lm(temp_max ~ Year)
fitmaxima2<- lm(temp_max ~ Year + I(Year^2))
fitmaxima3<- lm(temp_max ~ Year + I(Year^2) + I(Year^3))
```

```
AIC(fitmaxima1)
AIC(fitmaxima2)
AIC(fitmaxima3)
```

Apéndice

```
summary(fitmaxima1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
spring_med_anual1<- lm(primavera_med_anual ~ year1)
```

```
spring_med_anual2<- lm(primavera_med_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
spring_med_anual3<- lm(primavera_med_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(spring_med_anual1)
```

```
AIC(spring_med_anual2)
```

```
AIC(spring_med_anual3)
```

```
summary(spring_med_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA VERANO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
summer_med_anual1<- lm(verano_med_anual ~ year1)
```

```
summer_med_anual2<- lm(verano_med_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
summer_med_anual3<- lm(verano_med_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(summer_med_anual1)
```

```
AIC(summer_med_anual2)
```

```
AIC(summer_med_anual3)
```

```
summary(summer_med_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA OTOÑO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
autumn_med_anual1<- lm(otoño_med_anual ~ year1)
```

```
autumn_med_anual2<- lm(otoño_med_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
autumn_med_anual3<- lm(otoño_med_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(autumn_med_anual1)
```

```
AIC(autumn_med_anual2)
```

Apéndice

```
AIC(autumn_med_anual3)
```

```
summary(autumn_med_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA INVIERNO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
winter_med_anual1<- lm(invierno_med_anual ~ year1)
```

```
winter_med_anual2<- lm(invierno_med_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
winter_med_anual3<- lm(invierno_med_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(winter_med_anual1)
```

```
AIC(winter_med_anual2)
```

```
AIC(winter_med_anual3)
```

```
summary(winter_med_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
spring_max_anual1<- lm(primavera_max_anual ~ year1)
```

```
spring_max_anual2<- lm(primavera_max_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
spring_max_anual3<- lm(primavera_max_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(spring_max_anual1)
```

```
AIC(spring_max_anual2)
```

```
AIC(spring_max_anual3)
```

```
summary(spring_max_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA VERANO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
summer_max_anual1<- lm(verano_max_anual ~ year1)
```

```
summer_max_anual2<- lm(verano_max_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
summer_max_anual3<- lm(verano_max_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(summer_max_anual1)
```


Apéndice

```
AIC(summer_max_anual2)
```

```
AIC(summer_max_anual3)
```

```
summary(summer_max_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA OTOÑO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
autumn_max_anual1<- lm(otoño_max_anual ~ year1)
```

```
autumn_max_anual2<- lm(otoño_max_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
autumn_max_anual3<- lm(otoño_max_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(autumn_max_anual1)
```

```
AIC(autumn_max_anual2)
```

```
AIC(autumn_max_anual3)
```

```
summary(autumn_max_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA INVIERNO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
winter_max_anual1<- lm(invierno_max_anual ~ year1)
```

```
winter_max_anual2<- lm(invierno_max_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
winter_max_anual3<- lm(invierno_max_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(winter_max_anual1)
```

```
AIC(winter_max_anual2)
```

```
AIC(winter_max_anual3)
```

```
summary(winter_max_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA LA TEMPERATURA MÍNIMA ###
```

```
fitminima1<- lm(temp_min ~ Year)
```

```
fitminima2<- lm(temp_min ~ Year + I(Year^2))
```

```
fitminima3<- lm(temp_min ~ Year + I(Year^2) + I(Year^3))
```

Apéndice

```
AIC(fitminima1)
```

```
AIC(fitminima2)
```

```
AIC(fitminima3)
```

```
summary(fitminima1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

```
spring_min_anual1<- lm(primavera_min_anual ~ year1)
```

```
spring_min_anual2<- lm(primavera_min_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
spring_min_anual3<- lm(primavera_min_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(spring_min_anual1)
```

```
AIC(spring_min_anual2)
```

```
AIC(spring_min_anual3)
```

```
summary(spring_min_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA VERANO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

```
summer_min_anual1<- lm(verano_min_anual ~ year1)
```

```
summer_min_anual2<- lm(verano_min_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
summer_min_anual3<- lm(verano_min_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(summer_min_anual1)
```

```
AIC(summer_min_anual2)
```

```
AIC(summer_min_anual3)
```

```
summary(summer_min_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA OTOÑO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

```
autumn_min_anual1<- lm(otoño_min_anual ~ year1)
```

```
autumn_min_anual2<- lm(otoño_min_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
autumn_min_anual3<- lm(otoño_min_anual ~ year1 + I(year1^2)+ I(year1^3))
```

Apéndice

```
AIC(autumn_min_anual1)
```

```
AIC(autumn_min_anual2)
```

```
AIC(autumn_min_anual3)
```

```
summary(autumn_min_anual1)
```

```
### REGRESIÓN POLONOMIAL PARA INVIERNO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

```
winter_min_anual1<- lm(invierno_min_anual ~ year1)
```

```
winter_min_anual2<- lm(invierno_min_anual ~ year1 + I(year1^2))
```

```
winter_min_anual3<- lm(invierno_min_anual ~ year1 + I(year1^2) + I(year1^3))
```

```
AIC(winter_min_anual1)
```

```
AIC(winter_min_anual2)
```

```
AIC(winter_min_anual3)
```

```
summary(winter_min_anual1)
```

Apéndice B: Códigos de Programas en R para seleccionar el parámetro de suavizamiento

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA LA TEMPERATURA MEDIA ###
```

```
hCV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = temp_media,  
           n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(hCV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Temperatura Media ")
```

```
which.min(hCV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA LA TEMPERATURA MÁXIMA ###
```

```
h1CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = temp_max,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h1CV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Temperatura Máxima ")
```

```
which.min(h1CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA LA TEMPERATURA MÍNIMA ###
```

```
h2CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = temp_min,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h2CV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Temperatura Mínima ")
```

```
which.min(h2CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

Apéndice

```
h7CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = primavera_med_anual,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h7CV$CVfunction, type="l", xlab ="h", ylab ="CV(h)",  
     main = "CV(h) Primavera Media Anual ")
```

```
which.min(h7CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA VERANO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
h8CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = verano_med_anual,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h8CV$CVfunction, type="l", xlab ="h", ylab ="CV(h)",  
     main = "CV(h) Verano Media Anual ")
```

```
which.min(h8CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA OTOÑO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
h9CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = otoño_med_anual,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h9CV$CVfunction, type="l", xlab ="h", ylab ="CV(h)",  
     main = "CV(h) Otoño Media Anual ")
```

```
which.min(h9CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA INVIERNO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
invmed1<- read.table(file="invmed1.txt", header=T)
```

```
a10<- as.matrix(invmed1)
```

```
b10<- a10[,-1]
```

```
invierno_med_anual<- c(b10)
```

```
h10CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = invierno_med_anual,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

Apéndice

```
plot(h10CV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Invierno Media Anual ")
```

```
which.min(h10CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
h11CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = primavera_max_anual,  
             n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h11CV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Primavera Máxima Anual ")
```

```
which.min(h11CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA VERANO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
h12CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = verano_max_anual,  
             n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h12CV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Verano Máxima Anual ")
```

```
which.min(h12CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA OTOÑO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
h13CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = otoño_max_anual,  
             n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h13CV$CVfunction, type="l", xlab = "h", ylab = "CV(h)",  
     main = "CV(h) Otoño Máxima Anual ")
```

```
which.min(h13CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA INVIERNO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###  
h14CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = invierno_max_anual,  
             n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h14CV$CVfunction, type="l", xlab ="h", ylab ="(h)",  
     main = "CV(h) Invierno Máxima Anual ")
```

```
which.min(h14CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###  
h3CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = primavera_min_anual,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h3CV$CVfunction, type="l", xlab ="h", ylab ="CV(h)",  
     main = "CV(h) Primavera Mínima Anual ")
```

```
which.min(h3CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA VERANO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###  
h4CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = verano_min_anual,  
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)
```

```
plot(h4CV$CVfunction, type="l", xlab ="h", ylab ="CV(h)",  
     main = "CV(h) Verano Mínima Anual ")
```

```
which.min(h4CV$CVfunction)
```

```
### VALIDACIÓN CRUZADA PARA OTOÑO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###  
h5CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = otoño_min_anual,
```

Apéndice

```
        n_pts = 100, seq_bws = NULL)

plot(h5CV$CVfunction, type="l", xlab="h", ylab="CV(h)",
     main = "CV(h) Otoño Mínima Anual ")

which.min(h5CV$CVfunction)

### VALIDACIÓN CRUZADA PARA INVIERNO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
h6CV<- CVbw(type_kernel = "n", vec_data = invierno_min_anual,
            n_pts = 100, seq_bws = NULL)

plot(h6CV$CVfunction, type="l", xlab="h", ylab="CV(h)",
     main = "CV(h) Invierno Mínima Anual ")

which.min(h6CV$CVfunction)
```


Apéndice C: Códigos de Programas en R para seleccionar estimar la tendencia de la temperatura mediante regresión local polinomial

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA LA TEMPERATURA MEDIA ###
tsmedia<- ts(temp_media, start=c(1921,1), end=c(2012,12), frequency=12)
plot(tsmedia, ylab="Temperatura Media", xlab="Tiempo", col="gray69")

fitmed <- locpoly(Year, temp_media, degree = 1, kernel = "normal",
                 bandwidth = 2)
lines(fitmed, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1985, 28.3, c("h = 2"), bty="n", lty=c("longdash"), lwd=c(1.5),
      col= "blue", cex = 0.8, text.font=2)

### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA LA TEMPERATURA MÁXIMA ###
tsmax<- ts(temp_max, start=c(1921,1), end=c(2012,12), frequency=12)
plot(tsmax, ylab="Temperatura Máxima", xlab="Tiempo", col="gray69")

fitmax <- locpoly(Year, temp_max, degree = 1, kernel = "normal",
                 bandwidth = 3)
lines(fitmax, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1985, 27.5, c("h = 3"), bty="n", lty = "longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)

### REGRESIÓN POLINOMIAL PARA LA TEMPERATURA MÍNIMA ###
tsmin<- ts(temp_min, start=c(1921,1), end=c(2012,12), frequency=12)
plot(tsmin, ylab="Temperatura Mínima", xlab="Tiempo", col="gray69")

fitmin <- locpoly(Year, temp_min, degree = 1, kernel = "normal",
                 bandwidth = 2)
lines(fitmin, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1985, 24.5, c("h = 2"), bty="n", lty = "longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
tsprimmed1<- ts(primavera_med_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsprimmed1, ylab="Temperatura Media", xlab="Tiempo", col="gray69")

primmedanual<- locpoly(year1, primavera_med_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                        bandwidth=5)
lines(primmedanual, lwd=c(1.5), lty="longdash", col="blue")
legend(1980, 26, c("h = 5"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
       col="blue", cex = 0.8, text.font=2) #

### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA VERANO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
tsvermed1<- ts(verano_med_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsvermed1, ylab="Temperatura Media", xlab="Tiempo", col="gray69")

vermedanual <- locpoly(year1, verano_med_anual, degree = 1, kernel="normal",
                       bandwidth=3)
lines(vermedanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 26.5, c("h = 3"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
       col="blue", cex = 0.8, text.font=2) #

### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA OTOÑO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
tsotomed1<- ts(otoño_med_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsotomed1, ylab="Temperatura Media", xlab="Tiempo", col="gray69")

otomedanual<- locpoly(year1, otoño_med_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                       bandwidth=6)
lines(otomedanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 25, c("h = 6"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
       col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```

Apéndice

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA INVIERNO TEMPERATURA MEDIA ANUAL ###
```

```
tsinvmed1<- ts(invierno_med_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(year1, invierno_med_anual, ylab="Temperatura Media", xlab="Tiempo",
      col="gray69", type= "l" )
```

```
invmedanual<- locpoly(year1, invierno_med_anual, degree =1, kernel = "normal",
                      bandwidth=6)
```

```
lines(invmedanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
```

```
legend(1980, 22.75, c("h = 6"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA PRIMAVER TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
plot(tsprimmax1, ylab="Temperatura Máxima", xlab="Tiempo", col="gray69")
lines(tendspringmax1, type="l", lwd=c(1.5), col="gray40")
```

```
primmaxanual<- locpoly(year1, primavera_max_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth=5)
```

```
lines(primmaxanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
```

```
legend(1980, 31.85, c("h = 5"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA VERANO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
```

```
tsvermax1<- ts(verano_max_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsvermax1, ylab="Temperatura Máxima", xlab="Tiempo", col="gray69")
```

```
vermaxanual <- locpoly(year1, verano_max_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth=6)
```

```
lines(vermaxanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
```

```
legend(1980, 31.75, c("h = 6"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```

Apéndice

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA OTOÑO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
tsotomax1<- ts(otoño_max_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsotomax1, ylab="Temperatura Máxima", xlab="Tiempo", col="gray69")

otomaxanual<- locpoly(year1, otoño_max_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth=9)
lines(otomaxanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 30, c("h = 9"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)

### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA INVIERNO TEMPERATURA MÁXIMA ANUAL ###
tsinvmax1<- ts(invierno_max_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(year1,invierno_max_anual, type="l", ylab="Temperatura Máxima", xlab="Tiempo",
      col="gray69")

invmaxanual<- locpoly(year1, invierno_max_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth=8)
lines(invmaxanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 28, c("h = 8"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)

### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA PRIMAVERA TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
tsprimmin1<- ts(primavera_min_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsprimmin1, ylab="Temperatura Minima", xlab="Tiempo", col="gray69")

prim_min_anual<- locpoly(year1, primavera_min_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                        bandwidth = 7)
lines(prim_min_anual, lwd=c(1.5), lty="longdash", col="blue")
legend(1980, 22.5, c("h = 7"), bty="n", lty=c("longdash"),lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)

### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA VERANO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

Apéndice

```
tsvermin1<- ts(verano_min_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsvermin1, ylab="Temperatura Minima", xlab="Tiempo", col="gray69")
```

```
verminanual<- locpoly(year1, verano_min_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth = 6)
lines(verminanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 23.5, c("h = 6"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2) #
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA OTOÑO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

```
tsotomin1<- ts(otoño_min_anual, start=c(1921), end=c(2012), frequency=1)
plot(tsotomin1, ylab="Temperatura Minima", xlab="Tiempo", col="gray69")
```

```
otominanual<- locpoly(year1, otoño_min_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth=6)
lines(otominanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 21.8, c("h = 6"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```

```
### REGRESIÓN POLINOMIAL LOCAL PARA INVIERNO TEMPERATURA MÍNIMA ANUAL ###
```

```
tsinvmin1<- ts(invierno_min_anual, start=c(1921,1), end=c(2012,12), frequency=1)
plot(year1, invierno_min_anual, type="l", ylab="Temperatura Minima", xlab="Tiempo",
      col="gray69")
```

```
invminanual<- locpoly(year1, invierno_min_anual, degree = 1, kernel = "normal",
                      bandwidth=6)
lines(invminanual, lty="longdash", lwd=c(1.5), col="blue")
legend(1980, 20, c("h = 6"), bty="n", lty="longdash", lwd=c(1.5),
      col="blue", cex = 0.8, text.font=2)
```