



COLEGIO DE POSTGRADUADOS

INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN
EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

POSTGRADO DE SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
ESTADÍSTICA

**Una prueba de razón de verosimilitudes para
discriminar entre la distribución Poisson, Binomial y
Binomial Negativa**

Laura Elizabeth López Martínez

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, EDO. DE MÉXICO

2010

La presente tesis titulada: **Una prueba de razón de verosimilitudes para discriminar entre la distribución Poisson, Binomial y Binomial Negativa**, realizada por el alumno: **Laura Elizabeth López Martínez**, bajo la dirección del Consejo Particular indicado ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS

SOCIOECONOMÍA, ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA ESTADÍSTICA

CONSEJO PARTICULAR

CONSEJERO _____
Dr. Humberto Vaquera Huerta

ASESOR _____
Dr. José A. Villaseñor Alva

ASESOR _____
Dr. Filemón Ramírez Pérez

Una prueba de razón de verosimilitudes para discriminar entre la distribución Poisson, Binomial y Binomial Negativa

Laura Elizabeth López Martínez

Colegio de Postgraduados, 2010

En este trabajo se realiza inferencia estadística en la distribución Binomial Negativa Generalizada (*BNG*) y los modelos que anida, los cuales son Binomial, Binomial Negativa y Poisson. Se aborda el problema de estimación de parámetros en la distribución *BNG* y se propone una prueba de razón de verosimilitud generalizada para discernir si un conjunto de datos se ajusta en particular al modelo Binomial, Binomial Negativa o Poisson. Además, se estudian las potencias y tamaños de la prueba propuesta.

Por otro lado, con la finalidad de ilustrar la metodología propuesta, se presentan algunos ejemplos de datos extraídos de investigaciones previas para ver si la prueba es congruente con los resultados que se tienen.

Palabras clave: Sobredispersión, Distribuciones Discretas, Datos de Conteo, Prueba de Razón de Verosimilitud Generalizada.

A likelihood ratio test to discriminate between Poisson, Binomial and Negative Binomial distribution

Laura Elizabeth López Martínez

Colegio de Postgraduados, 2010

In this work, we use statistical inference on the Generalized Negative Binomial (*GNB*) distribution and on the models that nests which are the Binomial distribution, Negative Binomial distribution and Poisson distribution. We deal the problem of parameter estimation in the *GNB* distribution and we propose a generalized likelihood ratio test to discern whether a set of data fits to the Binomial, Negative Binomial or Poisson model. Also, we study the power and the size of the proposed test.

Furthermore, in order to illustrate the proposed methodology we present some examples using data from previous investigations to see if the test is consistent with the results.

Key words: Overdispersion, Discrete Distributions, Count Data, Generalized likelihood Ratio Test.

AGRADECIMIENTOS

A Dios...por tener poco que pedirle y tanto que agradecerle.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante la realización de mis estudios de postgrado.

Al Colegio de Postgraduados, en particular al Programa de Estadística, por haberme brindado la oportunidad de seguir mi formación académica en sus aulas.

Al Dr. Humberto Vaquera Huerta por su paciencia, apoyo y valiosa dirección en la realización de éste trabajo.

Al Dr. José A. Villaseñor Alva y Dr. Filemón Ramirez Pérez por sus oportunos comentarios, observaciones y su tiempo dedicado a la revisión de ésta tesis.

Al Dr. Paulino Perez Ramirez por su gran ayuda y su valioso tiempo brindados.

A la Línea Prioritaria de Investigación 15: Estadística, Modelado y Tecnologías de Información Aplicadas a la Agricultura y al Medio Rural por su apoyo.

A cada uno de mis profesores de quienes he recibido parte de su conocimiento para mi preparación.

A todo el personal administrativo de Estadística por su amabilidad y apoyo que me brindaron.

A mis compañeros y amigos del Colegio de Postgraduados: Arturo, Claudia, Benjamín, Oswaldo, Roxana y Yazmin que me acompañaron y apoyaron durante todo éste tiempo.

DEDICATORIA

A mis padres, Laura y Raymundo por todo su amor y por ser ejemplo de vida.

A mis hermanas, Angie y Lole por llenar mi vida de alegrías y amor.

A toda mi familia por su apoyo incondicional.

A todos mis queridos amigos por su cariño, apoyo y paciencia en todo momento.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Objetivos	4
2. Marco Teórico	5
2.1. Distribuciones Discretas	5
2.1.1. Distribución Binomial	5
2.1.2. Distribución Binomial Negativa	6
2.1.3. Distribución Poisson	7
2.2. Pruebas de Bondad de Ajuste	9
2.2.1. Prueba de Hipótesis	9
2.2.2. Prueba de Razón de Verosimilitud Generalizada	11
3. Estimación en la distribución Binomial Negativa Generalizada	12
3.1. Introducción y Definición	12
3.2. Estimadores de Momentos	13
3.3. Estimadores de Máxima Verosimilitud	15
3.4. Otros estimadores	17

4. Prueba Propuesta y estudio de comportamiento	18
4.1. Derivación de la Prueba	18
4.2. Implementación de la Prueba	19
4.3. Potencia de la Prueba	20
4.4. Tamaño de la Prueba	22
5. Ejemplos de aplicación	25
5.1. Centro Deportivo	25
5.2. Mosquito transmisor de Malaria	26
5.3. Ciclones Tropicales de Categoría 4 y 5 en el Atlántico	26
6. Conclusiones	28
Referencias	28
Apéndices	32
Apéndice A: Tablas de Potencia y Tamaño de las Pruebas	32
Apéndice B: Códigos en R	35
Apéndice C: Tablas de Ejemplos	43

Índice de tablas

5.1. Estimadores de la distribución <i>BNG</i> para ejemplo del Centro deportivo	25
5.2. Estimadores de la distribución <i>BNG</i> para Mosquito transmisor de Malaria	26
5.3. Estimadores de la distribución <i>BNG</i> para Ciclones Tropicales	26
.1. Potencia de la Prueba para el contraste de Binomial contra Binomial Negativa Generalizada ($\alpha = 0.05$).	32
.2. Potencia de la Prueba para el contraste de Binomial Negativa contra Binomial Negativa Generalizada ($\alpha = 0.05$).	33
.3. Potencia de la Prueba para el contraste de Poisson contra Binomial Negativa Generalizada ($\alpha = 0.05$).	33
.4. Tamaño de la Prueba para el contraste de Binomial contra Binomial Negativa Generalizada.	33
.5. Tamaño de la Prueba para el contraste de Binomial Negativa contra Binomial Negativa Generalizada.	34
.6. Tamaño de la Prueba para el contraste de Poisson contra Binomial Negativa Generalizada.	34
.7. Número de personas que se encuentran en el centro deportivo.	43
.8. Número de mosquitos transmisores de Malaria en etapa esporozoíto positiva capturados con trampas de luz.	43
.9. Número de Ciclones Tropicales de categoría 4 y 5 ocurridos en el Atlántico Norte.	44

Índice de figuras

2.1. Función de densidad Binomial.	6
2.2. Función de densidad Binomial Negativa.	7
2.3. Función de densidad Poisson.	8
3.1. Función de Probabilidad Binomial Negativa Generalizada con diferentes valores de θ , β y m	13
4.1. Potencia de la Prueba para el caso Binomial vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta_1 = 0.4$, $m = 2$ y un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$	21
4.2. Potencia de la Prueba para el caso Binomial Negativa vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta_1 = 0.4$, $m = 2$ y un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$	21
4.3. Potencia de la Prueba para el caso Poisson vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta_1 = 0.4$, $m = 2$ y un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$	22
4.4. Tamaño de la Prueba para el caso Binomial vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta = 0.3$ y $m = 4$	23
4.5. Tamaño de la Prueba para el caso Binomial Negativa vs. Binomial Negativa Generalizada.	24
4.6. Tamaño de la Prueba para el caso Poisson vs. Binomial Negativa Generalizada.	24

Capítulo 1

Introducción

Una tarea importante en la realización de estudios o investigaciones es la de clasificar de alguna forma los datos o mediciones con ciertos atributos o características de fenómenos bilógicos, actuariales, entre otros, de acuerdo a sus propiedades. Por ejemplo, el número de muertes por cáncer en una región, el número de artículos defectuosos en un proceso industrial, el número de accidentes en un periodo de tiempo, etc. Este tipo de datos requieren de un conteo para determinar sus elementos, en estos casos los modelos probabilísticos usados son las funciones de distribución discretas. Actualmente existe una gran cantidad de distribuciones discretas, en particular los modelos que son usados con mayor frecuencia para este tipo de datos son las distribuciones *Binomial*, *Binomial Negativa* y *Poisson*. No obstante, es bien conocido que la distribución Poisson subestima la varianza debido al fenómeno de sobredispersión para lo cual la distribución Binomial Negativa es una alternativa mientras que para el caso de subdispersión se recurre a la distribución Binomial.

Ante el problema de elegir una distribución que ajuste bien a los datos, [Jain y Consul \(1971\)](#) proponen una distribución *Binomial Negativa Generalizada (BNG)*, compuesta por la Binomial Negativa que incluye otro parámetro el cual toma en cuenta las variaciones de la media y la varianza. Probaron además que la distribución *Binomial Negativa Generalizada* se reduce a una Binomial o a una Binomial Negativa y converge a una Poisson, cuando el parámetro β es igual a 0, 1 o 1/2 respectivamente. En la actualidad, esta distribución generalizada tiene importantes aplicaciones en varios campos de estudio por sus buenos ajustes y porque incluye otros modelos como casos anidados.

Por otro lado, sabemos que mediante la inferencia estadística podemos obtener información sobre la distribución de una variable aleatoria X y los parámetros involucrados en el modelo usando métodos que toman en cuenta las observaciones. Algunas de las técnicas usadas para verificar la concordancia de los datos con el tipo de distribución que se cree que tienen son las pruebas de bondad de ajuste.

1.1. Antecedentes

Tomando en cuenta lo anterior, en esta investigación se parte de la distribución *Binomial Negativa Generalizada* la cual, como ya se menciona, anida los modelos que comunmente se usan para describir la distribución de datos de conteo (Binomial, Binomial Negativa y Poisson), para que después de un proceso de estimación de parámetros y validación de hipótesis se pueda seleccionar el modelo que mejor ajuste a los datos.

Es por esto que en el Capítulo 2 se presenta una revisión de los aspectos relevantes de las distribuciones que anida la distribución generalizada, así como definiciones y propiedades de pruebas de bondad de ajuste las cuales se utilizaron en el desarrollo de este trabajo.

En el Capítulo 3 se muestran la definición y propiedades de la distribución *BNG* así los estimadores de momentos y máxima verosimilitud. En el Capítulo 4 se presenta el desarrollo de la metodología propuesta, así como el estudio de la potencia y el tamaño de la prueba, y finalmente se presentan ejemplos a los cuales se les aplicó la prueba y las conclusiones del presente trabajo.

1.1. Antecedentes

Existen varios procedimientos para probar el ajuste de distribuciones discretas a los datos observados, en particular para las distribuciones Poisson, Binomial y Binomial Negativa algunas de ellas son:

La estadística ji-cuadrada de Pearson es usada frecuentemente para probar si las observaciones de una muestra tienen una distribución Poisson, Binomial, Binomial Negativa u otra (DeGroot y Schervish (2002)).

Una estadística usada para probar si las observaciones provienen de una distribución Poisson es el Índice de Dispersión Poisson (Fisher (1950)), el cual está definido por

$$R = \frac{nS^2}{\bar{X}} \tag{1.1}$$

con $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ y $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ en donde la distribución asintótica de R es una distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.

Una prueba de bondad de ajuste basada en la generalización de la ji-cuadrada mínima para la Binomial Negativa y otras distribuciones fue desarrollada por Hinz y Gurland (1970).

1.1. Antecedentes

Lin y Sanford (1983) estudiaron la potencia y el nivel de significancia de la prueba de razón de verosimilitudes asumiendo una distribución Poisson, de rangos de Kruskal-Wallis y de razón F , cuando los datos provienen de distribuciones como la Poisson, Binomial Negativa o Geométrica.

Kocherlakota y Kocherlakota (1986) propusieron una estadística para probar si los datos pertenecen a una familia Poisson, basado en la función generadora de probabilidades empírica:

$$K_n = \frac{\sqrt{n}[\phi(t_0) - \exp[\bar{X}(t_0 - 1)]]}{\sigma} \quad (1.2)$$

la cual bajo la hipótesis nula su distribución asintótica asociada es la distribución normal estándar.

Existe un método estadístico gráfico propuesto por Nakamura y Pérez Abreu (1993) el cual está basado en la función generadora de probabilidades empírica, para probar el ajuste de una muestra entre las distribuciones Poisson, Binomial o Binomial Negativa.

Vu y Maller (1996) construyeron la prueba de razón de verosimilitudes para probar si los datos provienen de un modelo Poisson.

Spinelli y Stephens (1997) propusieron una prueba de bondad de ajuste basadas en las estadísticas de *Cramér-Von Mises* para probar si una muestra proviene de una distribución Poisson con media desconocida.

Dauxois *et al.* (2006) propusieron un método bayesiano para elegir entre un modelo Poisson, Binomial y Binomial Negativo, utilizando la distribución de los coeficientes de la función de varianza para decidir el mejor modelo que ajuste a los datos.

Hernández *et al.* (2001) utilizaron una prueba de razón de verosimilitud basandose en la razón entre la media y la varianza para contrastar la distribución Poisson contra las distribuciones Binomial y Binomial Negativa.

Por otro lado, Famoye (1998a) estudió pruebas de bondad de ajuste basadas en la función de distribución empírica para la distribución Binomial Negativa Generalizada, contrastando la hipótesis nula de que una muestra pertenece a la distribución *BNG* contra la hipótesis alternativa de que no pertenece.

1.2. Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivos:

- Proponer una prueba estadística para discriminar si ciertos datos provienen de una distribución Poisson, Binomial o Binomial Negativa, usando la distribución Binomial Negativa Generalizada.
- Estudiar la potencia y el tamaño de la prueba propuesta.
- Aplicar la prueba propuesta a problemas con datos reales.

Capítulo 2

Marco Teórico

Existen una gran cantidad de modelos probabilísticos para variables aleatorias discretas. Entre las más usadas en investigaciones para modelar fenómenos aleatorios en donde las variables aleatorias son conteos, se distinguen la Binomial, Binomial Negativa y Poisson. En este capítulo se presentan sus definiciones y propiedades. Asimismo, se presentan algunos conceptos sobre pruebas de bondad de ajuste que son útiles para el desarrollo de éste trabajo.

2.1. Distribuciones Discretas

Una variable aleatoria X tiene una *distribución Discreta* si X puede tomar solo un número finito de valores x_1, x_2, \dots, x_k o al menos una sucesión infinita numerable de valores x_1, x_2, \dots , y su función de probabilidad es tal que

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{para todos los posibles valores de } X, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.1. Distribución Binomial

Esta distribución mide el número total de éxitos en m ensayos independientes con probabilidad de éxito para cada ensayo igual a θ .

Definición 2.1 *Una variable aleatoria X tiene distribución Binomial con parámetros m y θ si X tiene una distribución discreta para la cual la función de densidad es la*

2.1. Distribuciones Discretas

siguiente:

$$f_X(x; m, \theta) = \begin{cases} \binom{m}{x} \theta^x (1 - \theta)^{m-x} & \text{si } x = 0, 1, \dots, m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Además debe cumplirse que m es entero positivo y θ esta en el intervalo $0 \leq \theta \leq 1$.

Por otro lado, su *funcion generadora de momentos*, asi como su media y su varianza se obtienen con las siguientes expresiones respectivamente:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \prod_{i=1}^m E(e^{tX_i}) = (\theta e^t + (1 - \theta))^m, \quad (2.3)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^m E(X_i) = m\theta, \quad (2.4)$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^m Var(X_i) = m\theta(1 - \theta). \quad (2.5)$$

La gráfica de la función de probabilidad de un modelo Binomial con parámetros $m = 20$ y $\alpha = 0.4$ se presenta en la figura 2.1.

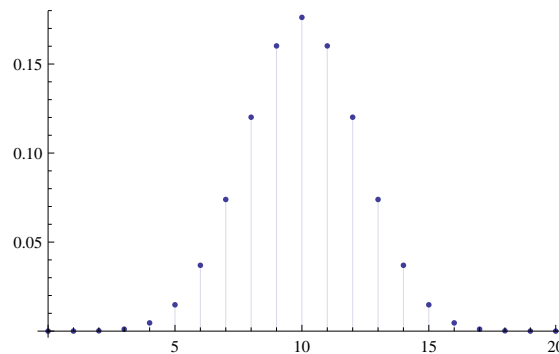


Figura 2.1: Función de densidad Binomial.

2.1.2. Distribución Binomial Negativa

Dado un experimento cuyas probabilidades de éxito y fracaso son θ y $1 - \theta$ respectivamente y si X es el número de fallos antes de producirse el éxito m -ésimo, se dice entonces que X tiene distribución *Binomial Negativa*.

2.1. Distribuciones Discretas

Definición 2.2 Una variable aleatoria X tiene una distribución binomial negativa con parámetros θ y m si la función de densidad de X es la siguiente:

$$f_X(x; m, \theta) = \begin{cases} \binom{m+x-1}{x} \theta^x (1-\theta)^m & \text{si } x=0, 1, \dots, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.6)$$

para $m = 1, 2, \dots$ y $0 \leq \theta \leq 1$.

Para esta distribución, la función generadora de momentos, así como su media y varianza se obtienen de la siguiente manera:

$$\phi(t) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)e^t} \right)^m \quad (2.7)$$

donde $t \leq \log \frac{1}{1-\theta}$ y

$$E(X) = \frac{m\theta}{1-\theta} \quad (2.8)$$

$$V(X) = \frac{m\theta}{(1-\theta)^2} \quad (2.9)$$

En la figura 2.2 se presenta la gráfica de una distribución Binomial Negativa con parámetros $m = 4$ y $\theta = 0.2$

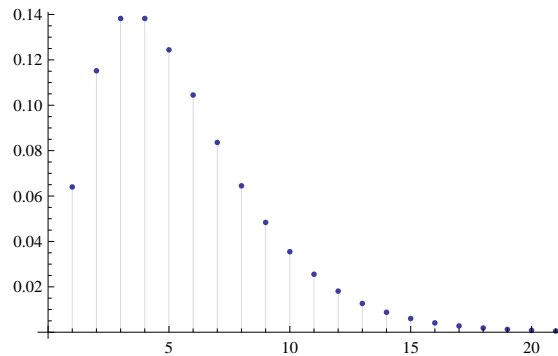


Figura 2.2: Función de densidad Binomial Negativa.

2.1.3. Distribución Poisson

Esta es la distribución del número de eventos ocurridos en un intervalo de tiempo o espacio cuando la probabilidad de más de un suceso en un intervalo muy corto es de

2.1. Distribuciones Discretas

magnitud mas pequeña que la de una sola ocurrencia donde el número de eventos en intervalos que no se traslapan son estadísticamente independientes (E. L. Lehmann, 2008).

Definición 2.3 Sea X una variable aleatoria con una distribución discreta y suponga que el valor de X es un entero no negativo. Se dice que X tiene una distribución Poisson con media λ ($\lambda > 0$) si la función de densidad es la siguiente:

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{si } x = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Para la distribución Poisson la *funcion generadora de momentos* para cualquier valor de t está dada por:

$$\phi(x) = E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad (2.11)$$

Finalmente, se tienen los valores de la esperanza y varianza que en este caso sabemos es el mismo valor, es decir,

$$E(X) = Var(X) = \lambda \quad (2.12)$$

La gráfica de la función de probabilidad de una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 4$ se muestra en la figura 2.3.

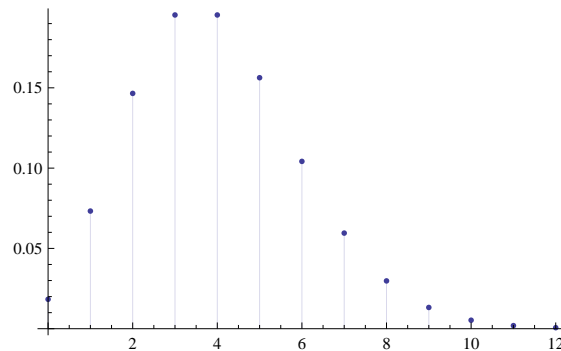


Figura 2.3: Función de densidad Poisson.

Ali1978

2.2. Pruebas de Bondad de Ajuste

La necesidad de un análisis estadístico se deriva del hecho de que no se conoce la distribución de X . La consecuencia de esta falta de conocimiento es la incertidumbre en cuanto al mejor modelo que explique el comportamiento de los datos obtenidos por el investigador. Por ello, la principal tarea de la estadística es la de hacer inferencia sobre ciertas características de una población, basada en la información de los datos.

Los métodos usados para determinar si una muestra de datos es consistente con la distribución sobre la cual se basa la inferencia son las pruebas de bondad de ajuste. Dentro de éstas pruebas están las llamadas pruebas de hipótesis que, como su nombre lo dice, tratan de decidir si alguna proposición sobre el espacio de parámetros formulada por el investigador es correcta o no, es decir, se toma la decisión de aceptar o rechazar la proposición.

2.2.1. Prueba de Hipótesis

Supongase que se tiene una muestra aleatoria $X = (X_1, \dots, X_n)$ con cierta densidad $f(x; \omega)$ y con una distribución $F(x; \omega)$, donde $\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ y Ω es el espacio de parámetros. Sea $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ donde Ω_0 y Ω_1 son dos conjuntos disjuntos, es decir, $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$. Dadas las realizaciones de X queremos decidir si ω está en Ω_0 o en Ω_1 .

La hipótesis de que ω pertenece a Ω_0 se le conoce como *hipótesis nula* y se denota por H_0 mientras que la hipótesis de que ω pertenece a Ω_1 se le llama *hipótesis alternativa* y se denota por H_1 .

Para determinar si ω está en Ω_0 o en Ω_1 se emplea una regla basada en X , la cual es una función ϕ que toma los valores 0 y 1, es decir, si $\phi(X) = 0$ entonces decimos que $\theta \in \Omega_0$ y si $\phi(X) = 1$ entonces $\omega \in \Omega_1$. Esta función depende de X mediante otra función cuyo valor llamado estadístico de prueba, el cual se denota por $T = T(X)$.

Una vez realizada la decisión es posible cometer algún error. Por esto es necesario examinar la probabilidad de hacer una mala decisión. Si $\omega \in \Omega_0$ y $\phi(X) = 1$ la probabilidad de cometer este error es:

$$P_\omega[\phi(X) = 1] = E_\omega[\phi(X)] \tag{2.13}$$

Es decir, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula dado que ésta es verdadera (*error tipo I*).

Analogamente, si $\omega \in \Omega_1$ y $\phi(X) = 0$ se tiene que la probabilidad de cometer éste

2.2. Pruebas de Bondad de Ajuste

error es:

$$P_\omega[\phi(X) = 0] = 1 - E_\omega[\phi(X)] \quad (2.14)$$

Es decir, es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa (*error tipo II*).

Existe una relación entre estas probabilidades: al disminuir la probabilidad de error cuando $\omega \in \Omega_0$, corremos el riesgo de aumentar la probabilidad de error para $\omega \in \Omega_1$.

Es por ésto que se busca una función de prueba $\phi(X)$ tal que para alguna $\alpha > 0$ se tiene que:

$$E_\omega[\phi(X)] \leq \alpha \quad (2.15)$$

para todo $\omega \in \Omega_0$, donde α es el tamaño de la prueba.

En otras palabras, de acuerdo a las hipótesis planteadas, se desea encontrar una función de prueba ϕ tal que $\pi(\omega) = E_\omega[\phi(X)]$ sea maximizada para $\omega \in \Omega_1$. Es decir, se desea encontrar $\pi(\omega)$ la cual maximice la probabilidad de rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando H_0 es falsa. A $\pi(\omega)$ se le llama potencia de la prueba en ω .

Una buena prueba tiene una función de potencia cercana a 1 cuando $\omega \in \Omega_1$ y cercana a 0 cuando $\omega \in \Omega_0$. Además, para $0 \leq \alpha \leq 1$, una prueba con función de potencia $\pi_\phi(\omega)$ es una prueba de tamaño α si

$$\sup_{\omega \in \Omega_0} \pi_\phi(\omega) = \alpha.$$

Para mayores detalles ver [Knight \(2000\)](#) y [Lehmann y Casella \(1998\)](#).

Usualmente se tiene interes en probar las hipótesis siguientes:

$$H_0 : \omega \in \Omega_0 \text{ vs } H_1 : \omega \in \Omega_1$$

con un nivel α espedificado y donde el problema es encontrar una función de prueba con nivel α que maximice la potencia de la prueba bajo H_1 .

Existen varios métodos para construir pruebas de hipótesis ([Casella y Berger \(2002\)](#)). Un método general es la *prueba de razón de verosimilitudes generalizada*.

2.2. Pruebas de Bondad de Ajuste

2.2.2. Prueba de Razón de Verosimilitud Generalizada

Un procedimiento para contrastar un juego de hipótesis es la Razón de Verosimilitud Generalizada, el cual utiliza el lema de Neyman-Pearson, junto con la estimación de máxima verosimilitud.

Definición 2.4 *El estadístico de Razón de Verosimilitud Generalizada (RVG) se define como el cociente de*

$$\lambda(X) = \frac{\sup_{\omega \in \Omega_0} f(X; \omega)}{\sup_{\omega \in \Omega_1} f(X; \omega)} = \frac{\sup_{\omega \in \Omega_0} L(\omega)}{\sup_{\omega \in \Omega_1} L(\omega)} \quad (2.16)$$

donde $L(\omega)$ es la función de verosimilitud.

Para usar el estadístico λ es necesario conocer su distribución cuando H_0 es verdadera. Algunas veces es muy difícil obtener la distribución de λ , sin embargo una alternativa es utilizar su distribución asintótica.

Para probar $H_0 : \omega = \omega_0$ vs $H_1 : \omega \neq \omega_0$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1 *Suponga que se tiene X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n de una densidad $f(x, \omega)$ que satisface ciertas condiciones de regularidad para $f(x, \omega)$, con ω el espacio de parámetros univariado, entonces bajo la hipótesis nula, cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que*

$$-2 \log \lambda \xrightarrow{d} \chi_1^2,$$

donde χ_1^2 es una variable aleatoria χ^2 con 1 grado de libertad.

Se rechaza H_0 a un nivel de significancia α si y solo si $-2 \log \lambda(X) \geq \chi_{1, 1-\alpha}^2$ donde $\chi_{1, 1-\alpha}^2$ es el cuantil $1 - \alpha$ de la distribución χ^2 con 1 grado de libertad (Mood *et al.* (1974)).

Capítulo 3

Estimación en la distribución Binomial Negativa Generalizada

En éste capítulo se presentan la definición y propiedades de la distribución Binomial Negativa Generalizada, así como sus estimadores de momentos y máxima verosimilitud.

3.1. Introducción y Definición

La distribución Binomial Negativa Generalizada (*BNG*) fue definida por [Jain y Consul \(1971\)](#). Es una familia particular de las distribuciones de probabilidad Lagrangianas encontrada por [Consul y Shenton \(1972\)](#) y además es parte de la familia de distribuciones en *Series de Potencias Modificadas* obtenida por [Gupta \(1974\)](#).

Definición 3.1 *Se dice que una variable aleatoria discreta X tiene una distribución binomial negativa generalizada con parámetros θ , β y m si su función de probabilidad está dada por*

$$f_X(x; \theta, \beta, m) = \begin{cases} \frac{m}{m+\beta x} \binom{m+\beta x}{x} \theta^x (1-\theta)^{m+\beta x-x} & x = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.1)$$

[Consul y Gupta \(1980\)](#) demuestran que bajo las condiciones del *Teorema de Lagrange* la distribución *BNG* es verdadera cuando $0 < \theta < 1$, $m > 0$, $\theta \leq \theta\beta < 1$ y $\beta = 0$, además de que no existen los momentos de ésta distribución cuando $\beta = \theta^{-1}$.

Sin embargo, [Consul y Famoye \(1995\)](#) en su estudio de estimación de parámetros encontraron que un gran número de parámetros estimados de β están en el intervalo

3.2. Estimadores de Momentos

(0,1). Algo similar observaron Famoye (1998a) y Hassan *et al.* (2004).

Por otro lado, Jain y Consul (1971) mencionan que si β es igual a 0 o 1 la distribución *BNG* se reduce a una distribución *Binomial* o *Binomial Negativa* respectivamente y si β es igual a $1/2$ entonces la distribución *BNG* se parece a una distribución *Poisson* ya que la media y la varianza son aproximadamente iguales.

La figura 3.1 muestra graficas de la función (3.1) con distintos valores en sus parámetros θ , β y m .

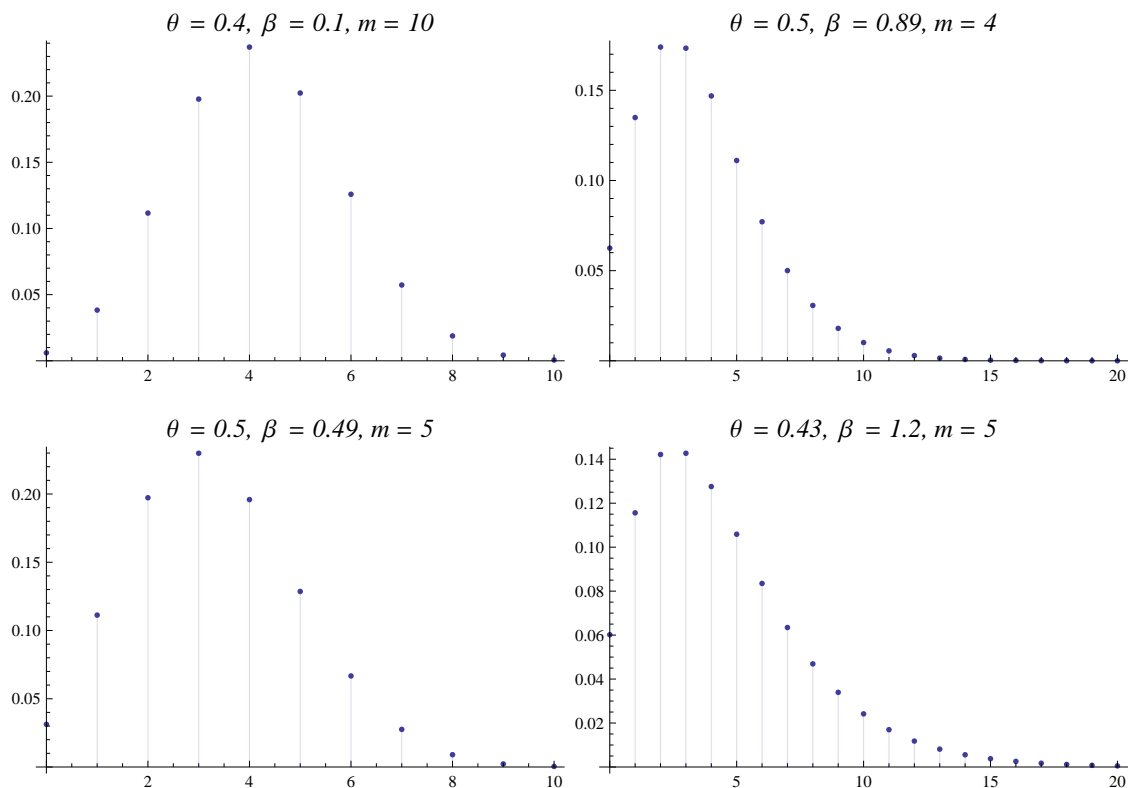


Figura 3.1: Función de Probabilidad Binomial Negativa Generalizada con diferentes valores de θ , β y m .

3.2. Estimadores de Momentos

De acuerdo a Jain y Consul (1971) el k -ésimo momento $M_k(m)$ alrededor del cero de la distribución *BNG* está dado por:

3.2. Estimadores de Momentos

$$M_k(m) = \sum_{x=0}^{\infty} x^k \frac{m}{m + \beta x} \binom{m + \beta x}{x} \theta^x (1 - \theta)^{m + \beta x - x} \quad (3.2)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$

Se puede verificar facilmente que para $k = 0$ se tiene $M_0(m) = 1$ y para $k \geq 1$,

$$M_k(m) = m\theta \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} [M_j(m + \beta - 1) + \frac{\beta}{m + \beta - 1} M_{j+1}(m + \beta - 1)] \quad (3.3)$$

Con ésta expresión es posible obtener los momentos de la distribución, es decir, sustituyendo $k = 1$ y despues de algunas simplificaciones se obtiene que la media de la distribución *BNG* es igual a

$$M_1(m) = \frac{m\theta}{1 - \beta\theta} \quad (3.4)$$

Por otro lado, sustituyendo $k = 2$ y reduciendo se tiene que

$$M_2(m) = \frac{(m\theta)^2}{(1 - \beta\theta)^2} + \frac{m\theta(1 - \theta)}{(1 - \beta\theta)^3} \quad (3.5)$$

Asi, de (3.4) y (3.5) se calcula la varianza de la distribución, es decir,

$$\mu_2 = M_2(m) - (M_1(m))^2 = \frac{m\theta(1 - \theta)}{(1 - \beta\theta)^3} \quad (3.6)$$

No es difícil obtener M_3 y M_4 , para ver el procedimiento se puede consultar [Jain y Consul \(1971\)](#). Una vez que se tienen estos valores tanto el tercer como el cuarto momento central se calculan de la siguiente manera:

$$\mu_3 = \frac{m\theta(1 - \theta)}{(1 - \beta\theta)^5} [1 - 2\theta + \beta\theta(2 - \theta)] \quad (3.7)$$

3.3. Estimadores de Máxima Verosimilitud

$$\mu_4 = \frac{3(m\theta)^2(1-\theta)^2}{(1-\beta\theta)^6} + \frac{m\theta(1-\theta)[1-6\theta+6\theta^2+2\beta\theta(4-9\theta+4\theta^2)+\beta^2\theta^2(6-6\theta+\theta^2)]}{(1-\beta\theta)^7} \quad (3.8)$$

Se puede ver en las expresiones de los momentos centrales que, sustituyendo los valores de $\beta = 0$ y $\beta = 1$, se tienen los momentos de las distribuciones Binomial y Binomial Negativa respectivamente. [Ali-Amidi \(1978\)](#) también obtuvo los momentos de ésta distribución usando otro método.

Considerando las expresiones anteriores, [Jain y Consul \(1971\)](#) obtuvieron la estimación de los parámetros α , β y m basadas en una muestra aleatoria de tamaño n y llegaron a las siguientes ecuaciones:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2}A + \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1} \quad (3.9)$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{n(1-\alpha)}{\mu_2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.10)$$

$$m = \frac{n(1-\alpha\beta)}{\alpha} \quad (3.11)$$

donde

$$A = -2 + \frac{[n\mu_3 - 3\mu_2^2]^2}{n\mu_2^3} \quad (3.12)$$

3.3. Estimadores de Máxima Verosimilitud

Un problema fundamental en el ajuste del modelo Binomial Negativo Generalizado es la estimación de los parámetros. [Famoye \(1997\)](#) estudió algunos métodos de estimación, entre ellos el método de máxima verosimilitud, así como su eficiencia.

Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución *BNG*, sean $0, 1, 2, \dots, k$ los valores observados cuyas frecuencias son $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$ respectivamente, con k el valor observado más grande de la muestra, tal que $n = \sum_{x=1}^k n_x$.

3.3. Estimadores de Máxima Verosimilitud

Entonces, la función log-verosimilitud del modelo 3.1 es:

$$\begin{aligned}
 l(x; \alpha, \beta, m) &= \ln \prod_{n=0}^k [P(X = x)]^{n_x} \\
 &= (n - n_0) \ln(m) + n \bar{x} \ln(\alpha) + n[m + (\beta - 1)\bar{x}] \ln(1 - \alpha) \\
 &+ \sum_{x=2}^k n_x \left[\sum_{i=1}^{x-1} \ln(m + \beta x - i) - \ln(x!) \right] \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Derivando se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial l(x; \theta, \beta, m)}{\partial \theta} = \frac{n[\bar{x} - \theta(m + \beta \bar{x})]}{\theta(1 - \theta)} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial l(x; \theta, \beta, m)}{\partial \beta} = n \bar{x} \ln(1 - \theta) + \sum_{x=2}^k \sum_{i=1}^{x-1} \frac{x n_x}{m + \beta x - i} = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial l(x; \theta, \beta, m)}{\partial m} = \frac{n - n_0}{m} + n \ln(1 - \theta) + \sum_{x=2}^k \sum_{i=1}^{x-1} \frac{n_x}{m + \beta x - i} = 0 \tag{3.16}$$

De la ecuación (3.14) se obtiene que el estimador de máxima verosimilitud para θ es

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{m + \beta \bar{x}} \tag{3.17}$$

No es posible obtener una expresión cerrada para calcular los estimadores de máxima verosimilitud. Por ello, se realizó un procedimiento numérico mediante un algoritmo de optimización en \mathbf{R} dando como semillas los valores de los estimadores de momentos indicados en (3.9), (3.10) y (3.11). Así mismo se reemplazaron los tres momentos μ_1 , μ_2 y μ_3 por sus estimadores obtenidos de los datos, es decir,

$$\hat{\mu}_1 = \Sigma \frac{n_x x}{n} \tag{3.18}$$

3.4. Otros estimadores

$$\hat{\mu}_2 = \frac{n(\sum n_x x^2) - (\sum n_x x)^2}{n(n-1)} \quad (3.19)$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{\sum n_x x^3 - 3\hat{\mu}_1(\sum x^2 n_x) + 2n\hat{\mu}_1^3}{n} \quad (3.20)$$

con $n = \sum n_x$.

Los programas utilizados para obtener los estimadores de momentos y máxima verosimilitud se muestran en el Apéndice B.

Para ver otras propiedades interesantes de la distribución *BNG* ver [Jain y Consul \(2006\)](#).

3.4. Otros estimadores

La estimación de parámetros de la distribución *BNG* ha sido estudiada por diversos investigadores. [Gupta \(1977\)](#) y [Jani \(1977\)](#) estudiaron los estimadores insesgados de mínima varianza, [Famoye \(1997\)](#) además de usar el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros de ésta distribución utiliza también los primeros dos momentos y la proporción de ceros, los primeros dos momentos y el cociente de las primeras dos frecuencias y la estimación chi-cuadrada, mientras que [Islam y Consul \(1986\)](#) estudiaron los estimadores bayesianos.

Todas estas estimaciones no son simples, por ello [Hassan *et al.* \(2004\)](#) proponen un método simple y facil para obtener estimadores de los parámetros de la distribución *BNG*.

Capítulo 4

Prueba Propuesta y estudio de comportamiento

En este capítulo se presenta una prueba de hipótesis sobre el parámetro β para verificar que una muestra aleatoria de observaciones se ajusta a una de las tres distribuciones que anida la distribución *BNG*. La prueba esta basada en la Razón de Verosimilitud. Además, se presenta el diseño de un experimento por simulación de Monte Carlo para obtener estimaciones del poder de la prueba y del tamaño de la prueba, correspondiente a las prueba de razón de verosimilitud generalizada para las hipótesis que se plantean.

4.1. Derivación de la Prueba

Como se mencionó anteriormente, la distribución *BNG* anida las distribuciones *Binomial*, *Binomial Negativa* y *Poisson* dependiendo del valor del parámetro β . El problema entonces, es decidir si algún conjunto de datos pertenece a alguna de éstas distribuciones o a la *BNG*. Es decir, se quiere hacer inferencia sobre el parámetro β .

Usando el contraste de hipótesis se verifica el valor de β para el conjunto de datos que se tiene. Por lo tanto, las hipótesis a examinar son:

$$H_0 : \beta = 0 \text{ vs } H_1 : \beta \neq 0 \text{ (Binomial vs BNG)} \quad (4.1)$$

$$H_0 : \beta = 1 \text{ vs } H_1 : \beta \neq 1 \text{ (Binomial Negativa vs BNG)} \quad (4.2)$$

4.2. Implementación de la Prueba

$$H_0 : \beta = \frac{1}{2} \text{ vs } H_1 : \beta \neq \frac{1}{2} \text{ (Poisson vs BNG)} \quad (4.3)$$

La prueba que se propone tiene como finalidad verificar si una muestra aleatoria dada proviene de algunas de las distribuciones antes mencionadas. La prueba consiste en:

- Estimar los parámetros $\hat{\theta}$, $\hat{\beta}$ y \hat{m} de máxima verosimilitud de la distribución BNG.
- Elegir el valor de β bajo la hipótesis nula H_0 ($\beta = 0, 1, 1/2$).
- Obtener la verosimilitud bajo H_0 y H_1 y con esto calcular el estadístico de razón de verosimilitud generalizada.
- Comparar el estadístico calculado con el valor crítico y decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

4.2. Implementación de la Prueba

De acuerdo a lo planteado en la sección anterior, para contrastar (4.1) se tiene una muestra aleatoria de datos. Para construir el estadístico se tabulan los datos con las observaciones y frecuencias, sea L_0 la función de verosimilitud bajo H_0 (distribucion binomial) y L_1 la función de verosimilitud bajo H_1 (distribución BNG). Con éstas funciones se obtiene el estadístico de RVG en (2.16) y finalmente, de acuerdo al teorema (2.1) se compara con el valor crítico $\chi_{1,1-\alpha}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} T = -2 \log \lambda(X) &= -2 \log \left(\frac{\sup_{\beta=0} \prod_{i=1}^n \binom{m_0}{x_i} \hat{\theta}_0^{x_i} (1-\hat{\theta}_0)^{m_0-x_i}}{\sup_{\beta \neq 0} \prod_{x=0}^k \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_1+\hat{\beta}x} \binom{\hat{m}_1+\hat{\beta}x}{x} \hat{\theta}_1^x (1-\hat{\theta}_1)^{\hat{m}_1+\hat{\beta}x-x}} \right) \\ &= -2 \log \left(\sup_{\beta=0} \prod_{i=1}^n \binom{m_0}{x_i} \hat{\theta}_0^{x_i} (1-\hat{\theta}_0)^{m_0-x_i} \right) \\ &+ 2 \log \left(\sup_{\beta \neq 0} \prod_{x=0}^k \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_1+\hat{\beta}x} \binom{\hat{m}_1+\hat{\beta}x}{x} \hat{\theta}_1^x (1-\hat{\theta}_1)^{\hat{m}_1+\hat{\beta}x-x} \right) \quad (4.4) \end{aligned}$$

Si $T = -2 \log \lambda(X) \geq \chi_{2,1-\alpha}^2$ entonces se rechaza H_0 , es decir, se dice que con un nivel de $\alpha = 0.05$ el valor de β es diferente de 0.

Analogamente para las hipótesis (4.2) y (4.3) se obtiene el cociente de razón de verosimilitud generalizada para construir el estadístico y compararlo, rechazando H_0 cuando $T = -2 \log \lambda(X) \geq \chi_{1,1-\alpha}^2$ a un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

4.3. Potencia de la Prueba

Note que para la verosimilitud bajo $H_0 : \beta = 0$ (caso Binomial), se estimó el parámetro α dejando como parámetro conocido a $m_0 = \sum n_x$. Sin embargo, para los casos donde las distribuciones consideradas en la hipótesis nula son Binomial Negativa y Poisson, se estiman todos los parámetros.

4.3. Potencia de la Prueba

La potencia de la prueba es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa. Para estudiar su comportamiento, igual que para el tamaño de la prueba, se hace mediante simulación Monte Carlo para diferentes tamaños de muestras provenientes de una distribución Binomial Negativa Generalizada. En cada repetición se calcula el estadístico de razón de verosimilitud generalizada y se obtiene la proporción del número de veces que en las 10000 simulaciones se rechaza la hipótesis nula, cuando la hipótesis alternativa es cierta. Par ello se utiliza el siguiente algoritmo:

Algoritmo 4.1 *Potencia de la Prueba*

1. Fijar valores del tamaño de muestra n y los parámetros θ , β y m .
2. Hacer $Rechaza = 0$.
3. Generar una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución Binomial Negativa Generalizada.
4. Obtener los valores de las frecuencias n_x .
5. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud bajo H_0 y H_1 .
6. Obtener el valor del estadístico de Razón de Verosimilitud, $T = -2 \log \lambda(X)$.
7. Comparar el valor obtenido con el cuantil $\chi_{1,1-\alpha}^2$. Si $T = -2 \log \lambda(X) \geq \chi_{1,1-\alpha}^2$ entonces $Rechaza = Rechaza + 1$.
8. Repetir los pasos 3 al 7 M veces.
9. Calcular la proporción de veces en las que en las M réplicas se rechaza H_0 .

Para generar muestras aleatorias de la distribución *BNG* se utilizo el método de inversión presentado por Famoye (1998b).

Los valores obtenidos con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ se muestran en el Apéndice A. Los resultados son los siguientes:

4.3. Potencia de la Prueba

- Caso Binomial vs Binomial Negativa Generalizada. En este caso se observa en la figura (4.1) que para valores grandes de la muestra (n) la potencia aumenta al igual que conforme se aleja el valor β de 0. Sin embargo para tamaños de muestra menores 500 la potencia es muy grande.

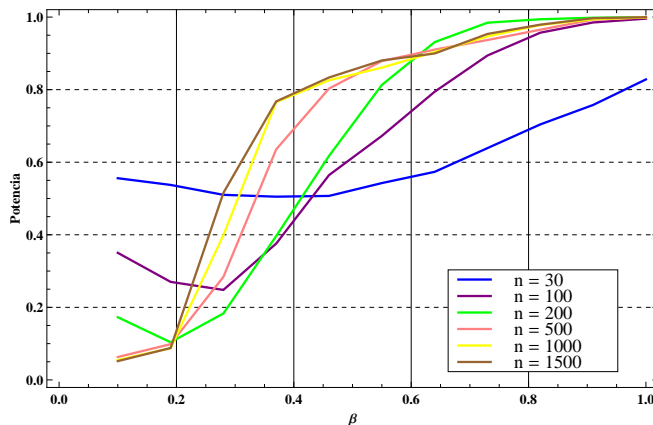


Figura 4.1: Potencia de la Prueba para el caso Binomial vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta_1 = 0.4$, $m = 2$ y un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

- Caso Binomial Negativa vs Binomial Negativa Generalizada. De acuerdo a la figura (4.2) la potencia de la prueba disminuye conforme el valor de β se acerca a 1. Además, aumentando el tamaño de la muestra n la potencia también aumenta. Sin embargo, como en el caso anterior, la potencia es grande para tamaños de muestra menores a 500.

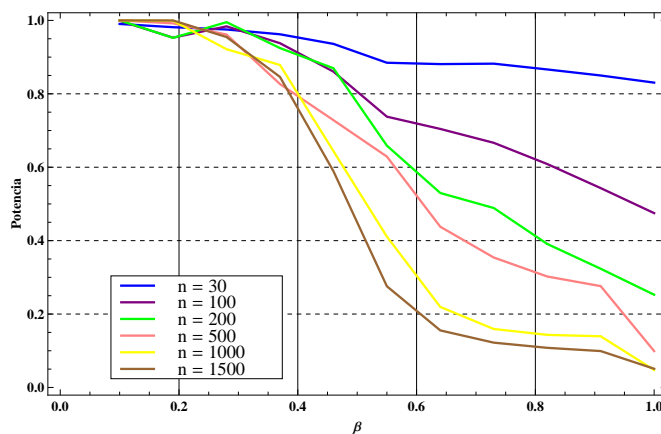


Figura 4.2: Potencia de la Prueba para el caso Binomial Negativa vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta_1 = 0.4$, $m = 2$ y un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

- Caso Poisson vs Binomial Negativa Generalizada. Se puede ver en la figura (4.3)

4.4. Tamaño de la Prueba

que para este caso se tiene un incremento de la potencia conforme aumenta el tamaño de muestra y un descenso de la misma al alejar el valor β de 0.5. Además, se tiene también que para tamaños de muestra pequeños la potencia es muy grande.

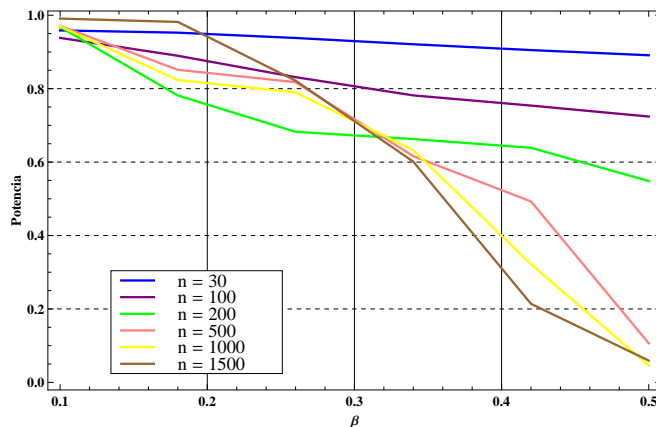


Figura 4.3: Potencia de la Prueba para el caso Poisson vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta_1 = 0.4$, $m = 2$ y un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

4.4. Tamaño de la Prueba

Para determinar el tamaño de la prueba se calcula el estadístico de razón de verosimilitud 10000 veces para muestras aleatorias ya sea de una distribución Binomial, Binomial Negativa o Poisson. Posteriormente se compara este valor con el cuantil correspondiente a los niveles de significancia α como se muestra en las tablas del apéndice A. A partir de éste proceso, se obtiene la proporción del número de veces en que las 10000 réplicas se rechaza la hipótesis nula, la cual es una estimación del tamaño de la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es cierta (error tipo I). El algoritmo empleado para éste proceso es el siguiente:

Algoritmo 4.2 *Tamaño de la Prueba*

1. Fijar valores del tamaño de la muestra n y de θ , β y m de acuerdo a la distribución que se tiene.
2. Fijar el nivel de significancia.
3. Hacer $Rechaza = 0$.

4.4. Tamaño de la Prueba

4. Generar una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución de la hipótesis nula.
5. Repetir los pasos 4 al 7 del algoritmo (4.1).
6. Repetir los pasos 4 y 5 M veces.
7. Calcular la proporción de veces en las que en las M réplicas se rechaza H_0 .

Los resultados obtenidos para niveles de significancia de $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ se presentan a continuación, las tablas con los valores numéricos se presentan en el Apéndice A:

- Caso Binomial vs Binomial Negativa Generalizada. La figura (4.4) indica que conforme se aumenta el tamaño de la muestra la probabilidad de rechazar H_0 dado que ésta es cierta se mantiene alrededor del valor de α fijado.

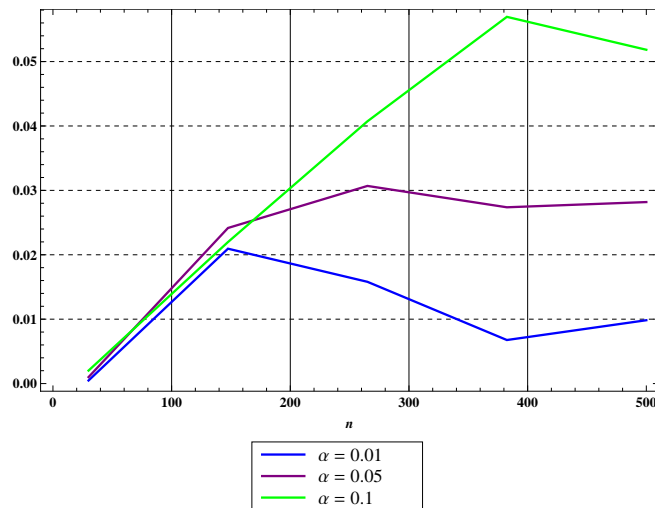


Figura 4.4: Tamaño de la Prueba para el caso Binomial vs. Binomial Negativa Generalizada con $\theta = 0.3$ y $m = 4$.

- Caso Binomial Negativa vs Binomial Negativa Generalizada. En la figura (4.5) se observa que para tamaños de muestra n pequeños los valores de α son alrededor de 0.1 mientras que para muestras grandes α es consistente al nivel de significancia fijado.
- Caso Poisson vs Binomial Negativa Generalizada. En la gráfica 4.6 se tiene un comportamiento similar al anterior, para muestras pequeñas α toma valores cercanos a 0.5 y para muestras grandes el valor de α se sitúa alrededor del valor fijado.

4.4. Tamaño de la Prueba

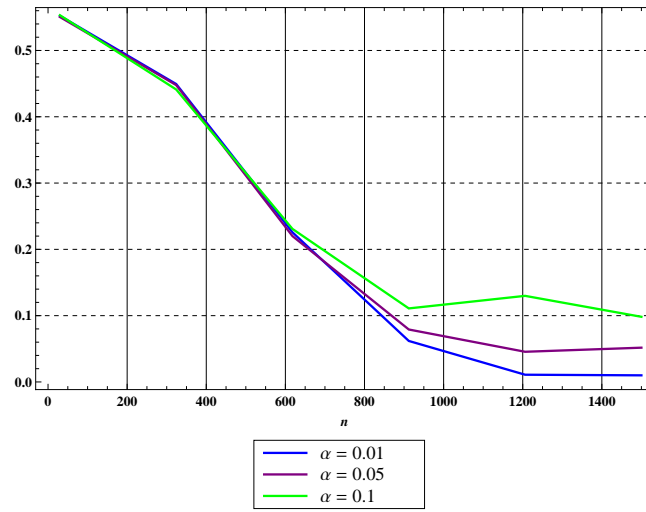


Figura 4.5: Tamaño de la Prueba para el caso Binomial Negativa vs. Binomial Negativa Generalizada.

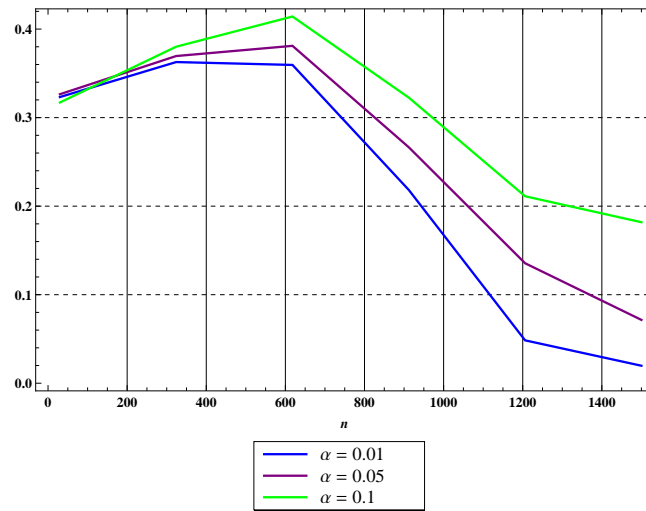


Figura 4.6: Tamaño de la Prueba para el caso Poisson vs. Binomial Negativa Generalizada.

Capítulo 5

Ejemplos de aplicación

A continuación se presentan algunos ejemplos con datos de investigaciones previas, con la finalidad de ilustrar la utilidad de la prueba presentada en el capítulo 4. En el Apéndice se muestran las tablas de los datos de los ejemplos considerados.

5.1. Centro Deportivo

Considerese un ejemplo clásico: Tres personas visitarán cada uno el centro deportivo de la ciudad para nadar una noche de la siguiente semana pero no han hecho ningún acuerdo entre sí para encontrarse o ir algún día en particular. La variable aleatoria X es "de los tres, cuantos van al centro deportivo el día Miercoles". Los datos obtenidos aparecen en la tabla del Apéndice C.

Al calcular los estimadores de máxima verosimilitud bajo la hipótesis alternativa se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 5.1: Estimadores de Máxima Verosimilitud de la distribución BNG para los datos del centro deportivo.

$\hat{\theta}$	0.8854564
$\hat{\beta}$	0.3162872
\hat{m}	1.0360788

El valor de β es pequeño, cercano a 0 por lo que se elige contrastar las hipótesis [4.1](#). Al aplicar la prueba de razón de verosimilitud se obtiene que el valor del estadístico es de $-2 \log \lambda(X) = 1.431372$ el cual es menor a el cuantil $\chi_{1,0.95}^2 = 3.841459$, por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, los datos tienen una distribución binomial.

5.2. Mosquito transmisor de Malaria

Para mostrar los resultados de la prueba Binomial Negativa contra BNG se utilizan los datos proporcionados por [Drakeley et al. \(2003\)](#). En este estudio presentan el número de mosquitos transmisores de Malaria en etapa esporozoíto positiva capturados con trampas de luz en una región de Sudáfrica (Apéndice C). Los resultados obtenidos con un tamaño $\alpha = 0.05$ se presentan a continuación:

Tabla 5.2: Estimadores de Máxima Verosimilitud de la distribución BNG para los datos de Mosquitos transmisores de Malaria.

$\hat{\theta}$	0.2532310
$\hat{\beta}$	1.4459204
\hat{m}	0.1237229

Se observa que el valor de β es aproximadamente 1.4 por lo tanto se contrastaron las hipótesis 4.2, es decir, Binomial Negativa contra BNG .

Entonces, los estimadores de máxima verosimilitud bajo la hipótesis nula fueron $\theta = 0.549982$ y $m = 0.06042140$. El valor del estadístico que se obtuvo es de $-2 \log \lambda(X) = 0.03090408$ el cual no es mayor que el cuantil $\chi_{1,0.95}^2 = 3.841459$, por lo tanto de acuerdo a la prueba de razón de verosimilitud la distribución del número de mosquitos transmisores de Malaria en Sudáfrica es Binomial Negativa.

5.3. Ciclones Tropicales de Categoría 4 y 5 en el Atlántico

En éste ejemplo se consideraron los datos de ciclones tropicales de categoría 4 y 5 ocurridos en el Atlántico Norte ([Carrillo Negrete \(2010\)](#)), los datos se presentan en el Apéndice C. Para esta serie de datos se aplicó la prueba de razón de verosimilitud para probar que los datos siguen un modelo Poisson y se obtuvo que con un tamaño de $\alpha = 0.05$ no se rechaza la hipótesis $H_0 : \beta = 0.5$, lo cual concuerda con el estudio realizado por [Carrillo Negrete \(2010\)](#). A continuación se muestran los resultados obtenidos:

Tabla 5.3: Estimadores de Máxima Verosimilitud de la distribución BNG para los datos de Ciclones Tropicales en el Atlántico.

$\hat{\theta}$	0.5139924
$\hat{\beta}$	0.5346412
\hat{m}	1.8569373

5.3. Ciclones Tropicales de Categoria 4 y 5 en el Atlántico

El valor del estadístico es $-2 \log \lambda(X) = 0.08562143$ el cual no es mayor que el cuantil $\chi^2_{1,0.95}$, por lo tanto no se rechazó la hipótesis nula, es decir, aplicando la prueba se llega a que la distribución de los ciclones sigue una distribución Poisson.

Capítulo 6

Conclusiones

Con base en el análisis realizado y haciendo énfasis en los estudios de simulación y en los ejemplos se puede concluir que:

1. La potencia aumenta conforme el valor de β se aleja de los valores respectivos para este parámetro de acuerdo a las distribuciones Binomial ($\beta = 0$), Binomial Negativa ($\beta = 1$) y Poisson ($\beta = 0.5$) y conforme el valor de la muestra aumenta. Sin embargo, para tamaños de muestra menores a 500 la potencia es muy grande cuando β toma valores cercanos al de la hipótesis nula.
2. Por otro lado, los valores de los tamaños estimados mediante simulación para la hipótesis Binomial Negativa y Poisson, son cercanos a 0.5 y 0.3 respectivamente para tamaños de muestra pequeños, pero son cercanos al valor de α considerado cuando el tamaño de muestra es mayor o igual a 500.
3. Para el caso Binomial, los valores del tamaño son muy pequeños cuando la muestra es pequeña y conforme ésta aumenta ($n \geq 500$) los valores estimados son cercanos al valor de α considerado.
4. La prueba propuesta funciona al aplicarla a ejemplos de investigaciones anteriores cuyos modelos son Binomial, Binomial Negativa o Poisson ya que distingue entre éstas distribuciones.
5. En general, se tiene que de acuerdo al valor del parámetro β (0, 1, 1/2) de la distribución *BNG* los datos pertenecen a algún modelo que anida ésta distribución generalizada (Binomial, Binomial Negativa, Poisson).

Referencias

- Ali-Amidi (1978). A Note on the Moments of the Generalized Negative Binomial Distribution and on Certain Properties of This Distribution. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34, 223–224.
- Carrillo Negrete, O. I. (2010). *Modelación de la Frecuencia e Intensidad de Ciclones Tropicales Usando el Proceso Poisson No Homogéneo*. Proyecto Fin de Carrera, Colegio de Postgraduados.
- Casella, G. y Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*. Duxbury, Thomson Learning.
- Consul, P. C. y Famoye, F. (1995). On the generalizes negative binomial distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 24, 459–472.
- Consul, P. C. y Gupta, H. C. (1980). The Generalized Negative Binomial Distribution and its Characterization by Zero Regression. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 39, 231–237.
- Consul, P. C. y Shenton, L. R. (1972). Use of Lagrange Expansion for Generating Discrete Generalized Probability Distributions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 23, 239–248.
- Dauxois, J.-Y., Druilhet, P. y Pommeret, D. (2006). A bayesian choice between poisson, binomial and negative binomial models. *Test*, 15, 423–432.
- DeGroot, M. H. y Schervish, M. J. (2002). *Probability and Statistics*. Addison-Wesley.
- Drakeley, C., Schellenberg, D., Kihonda, J., Sousa, C. A., Arez, A. P., Lopes, D., Lines, J., Mshinda, H., Lengeler, C., Schellenberg, J. A., Tanner, M. y Alonso, P. (2003). An estimation of the entomological inoculation rate for Ifakara: a semi-urban area in a region of intense malaria transmission in Tanzania. *Tropical Medicine International Health*, 8, 767–774.
- E. L. Lehmann, J. P. R. (2008). *Testing Statistical Hypotheses*. 2nd. Edition. Springer Science-Business Media, LLC.
- Famoye, F. (1997). Parameter estimation for generalized negative binomial distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 26, 269–279.
- Famoye, F. (1998a). Bootstrap Based Tests for Generalized Negative Binomial Distribution. *Computing*, 61, 359–369.

Referencias

- Famoye, F. (1998b). Computer generation of generalized negative binomial deviates. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 60, 107–122.
- Fisher, R. (1950). The significance of deviations from expectation in a Poisson series. *Biometrics*, 6, 17–24.
- Gupta, R. C. (1974). Modified power series distribution and some of its applications. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 36, 288–298.
- Gupta, R. C. (1977). Minimum variance unbiased estimation in a modified power series distribution and some of its applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 6, 977–991.
- Hassan, A., Jan, T. R., Raja, T. A. y Mir, K. A. (2004). A simple method for estimating generalized negative binomial distribution. *Soochow Journal of Mathematics*, 30, 411–418.
- Hernández, d. l. R., Villaseñor-Alva, J. A. y Vaquera-Huerta, H. (2001). La prueba de razón de verosimilitudes para la distribución Poisson contra Binomial Negativa o Binomial. *Agrociencia*, 35, 211–222.
- Hinz, P. y Gurland, J. (1970). A Test of Fit for the Negative Binomial and Other Contagious Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 65, 887–903.
- Islam, M. N. y Consul, P. C. (1986). Bayesian estimation in generalized negative binomial distribution. *Biometrics*, 28, 250–266.
- Jain, G. C. y Consul, P. C. (1971). A Generalized Negative Binomial Distribution. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21, 501–513.
- Jain, G. C. y Consul, P. C. (2006). *Lagrangian Probability Distributions*. Birkhauser Boston, Springer Science-Business Media Inc., United States of America.
- Jani, P. (1977). Minimum variance unbiased estimation for some left truncated modified power series distribution. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 39, 258–278.
- Knight, K. (2000). *Mathematical Statistics*. CRC Press LLC.
- Kocherlakota, S. y Kocherlakota, K. (1986). Goodness of fit tests for discrete distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 15, 815–829.
- Lehmann, E. y Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer-Verlag.
- Lin, L. I.-K. y Sanford, R. L. (1983). The robustness of the likelihood ratio test, the nonparametric sum rank test, and F-ratio test when the populations are from the negative binomial family. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 12(5), 523–539.
- Mood, A., Graybill, A. y Boes, D. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw Hill.

Referencias

- Nakamura, M. y Pérez Abreu, V. (1993). Exploratory data analysis for counts using the empirical probability generating function. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 22(3), 827–842.
- Spinelli, J. J. y Stephens, M. A. (1997). Cramér-von Mises tests of fit for the Poisson Distribution. *The Canadian Journal of Statistics*, 25, 257–268.
- Vu, H. T. V. y Maller, R. A. (1996). The likelihood ratio test for Poisson versus binomial distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 91, 818–824.

Apéndices

Apéndice A: Tablas de Potencia y Tamaño de las Pruebas

Tabla .1: Potencia de la Prueba para el contraste de Binomial contra Binomial Negativa Generalizada ($\alpha = 0.05$).

β	n					
	30	100	200	500	1000	1500
0	0.5559000	0.3502600	0.1727116	0.0629899	0.0548933	0.0517294
0.1	0.5374000	0.2702000	0.1037893	0.0985650	0.0875859	0.0877863
0.2	0.5101000	0.2480076	0.1831055	0.2840081	0.3993018	0.5155730
0.3	0.5050000	0.3758621	0.3965454	0.6355797	0.7656607	0.7676590
0.4	0.5071000	0.5645000	0.6174029	0.8030330	0.8258262	0.8335840
0.5	0.5425000	0.6725000	0.8130293	0.8789027	0.8606225	0.8804470
0.6	0.5735000	0.7943000	0.9310150	0.9403828	0.9035788	0.8996935
0.7	0.6389000	0.8941000	0.9844863	0.9668276	0.9465875	0.9535271
0.8	0.7042000	0.9570000	0.9939976	0.9851383	0.9781923	0.9791115
0.9	0.7578000	0.9852000	0.9982155	0.9970863	0.9940476	0.9970064
1	0.8282000	0.9957000	0.9995688	0.9989183	0.9990256	0.9996383

Tabla .2: Potencia de la Prueba para el contraste de Binomial Negativa contra Binomial Negativa Generalizada ($\alpha = 0.05$).

β	n					
	30	100	200	500	1000	1500
0	0.9903000	0.9989765	1	1	1	1
0.1	0.9815267	0.9529285	0.9524508	0.9919555	0.9990396	0.9998162
0.2	0.9752519	0.9837907	0.9952327	0.9614537	0.9215897	0.9547368
0.3	0.9622016	0.9378935	0.9246611	0.8266667	0.8785942	0.8460765
0.4	0.9360439	0.8604916	0.8696280	0.7282492	0.6439791	0.5892116
0.5	0.8846714	0.7377522	0.6587798	0.6289979	0.4110429	0.2756867
0.6	0.8809634	0.7042877	0.5297534	0.4377682	0.2193615	0.1553986
0.7	0.8821411	0.6665080	0.4888632	0.3540107	0.1593011	0.1220989
0.8	0.8664076	0.6087372	0.3909986	0.3022752	0.1432990	0.1079718
0.9	0.8499255	0.5431356	0.3234323	0.2760870	0.1394628	0.0991820
1	0.8304977	0.4749639	0.2526602	0.0991706	0.0476434	0.0509300

Tabla .3: Potencia de la Prueba para el contraste de Poisson contra Binomial Negativa Generalizada ($\alpha = 0.05$).

β	n					
	30	100	200	500	1000	1500
0	0.9586885	0.9382742	0.9678423	0.9710439	0.9695499	0.9908907
0.1	0.9525405	0.8895971	0.7814760	0.8513617	0.8233471	0.9817815
0.2	0.9380878	0.8313603	0.6826146	0.8178088	0.7899497	0.8218218
0.3	0.9209865	0.7816992	0.6627171	0.6163072	0.6325486	0.6012179
0.4	0.9051137	0.7539342	0.6389410	0.4928038	0.3219679	0.2139436
0.5	0.8910174	0.7240671	0.5484558	0.1066012	0.0463489	0.0592690

Tabla .4: Tamaño de la Prueba para el contraste de Binomial contra Binomial Negativa Generalizada.

n	α		
	0.01	0.05	0.1
30	0.000479846	0.001005025	0.002019182
50	0.02094511	0.024161074	0.021978022
100	0.015801354	0.030690537	0.040722611
200	0.006762468	0.027373824	0.056945643
500	0.009836066	0.02818448	0.051836357

Tabla .5: Tamaño de la Prueba para el contraste de Binomial Negativa contra Binomial Negativa Generalizada.

n	α		
	0.01	0.05	0.1
30	0.552253591	0.55050442	0.55317833
50	0.449372703	0.44777062	0.44115039
100	0.225617209	0.21995134	0.23077868
200	0.061829507	0.07910258	0.11091774
500	0.010894142	0.04551268	0.12985597
1000	0.009970385	0.05168070	0.09826322

Tabla .6: Tamaño de la Prueba para el contraste de Poisson contra Binomial Negativa Generalizada.

n	α		
	0.01	0.05	0.1
30	0.32322588	0.3264177	0.3170680
50	0.36275907	0.3695581	0.3800905
100	0.35949843	0.3810658	0.4142079
200	0.21829352	0.2664846	0.3225940
500	0.04843111	0.1355161	0.2111773
1000	0.01975862	0.0715397	0.1818651

Apéndice B: Códigos en R

Generador de Números Aleatorios para la Distribución Binomial Negativa Generalizada

```
rgni=function(theta,beta,m)
{
  omega=theta*(1-theta)^(beta-1)
  P=(1-theta)^m
  X=0
  U=runif(1)
  ans=NULL
  if(U<=P)
  {
    ans=X
  } else
  {
    U=U-P
    X=X+1
    P=omega*m*P
    if(U<=P)
    {
      ans=X
    } else
    {
      while(U>P)
      {
        U=U-P
        X=X+1
        ans=X
        C=1
        for(i in 1:(X-1))
        {
          C=C*(1+beta*(m+beta*X-beta-i)^(-1))
        }
        P=omega*C*(m+(beta-1)*(X-1))*X^(-1)*P
      }
    }
  }
  return(ans)
}

#Generar n numeros aleatorios con los parámetros theta, beta y m
rgnb=function(n,theta,beta,m)
{
```

```
random=rep(NULL,n)
for(i in 1:n) random[i]=rgni(theta,beta,m)
return(random)
}
```

Cálculo de estimadores de máxima verosimilitud para la Distribución Binomial Negativa Generalizada

#Función de verosimilitud de la distribución Binomial Negativa Generalizada

```
vero=function(rho,obs,frec)
{
  theta=rho[1]
  beta=rho[2]
  m=rho[3]
  lvero=Inf
  if(!is.nan(theta) & !is.nan(beta) & !is.nan(m))
  {
if(theta<1 & theta>0 & abs(theta*beta)<1 & m>0)
{
  xbarra=weighted.mean(obs,frec)
  n=sum(frec)
  n0=frec[1]
  k=max(obs)
  frec=frec[-1]
  obs=obs[-1]
  suma1=0;
  for(x in 2:k)
  {
suma2=0;
          flag=0
for(i in 1:(x-1))
{
          if(m+beta*x-i>0)
          {
suma2=suma2+log(m+beta*x-i)
          } else{
          flag=1
          }
}
suma2=suma2-lfactorial(x);
suma1=suma1+frec[x]*suma2;
  }
          if(flag==0)
          lvero=(n-n0)*log(m)+n*xbarra*log(theta)
          +n*(m+(beta-1)*xbarra)*log(1-theta)+suma1
}
```

Apéndices

```
}
  }
  return(-lvero)
}

#Momentos de la distribución Binomial Negativa Generalizada
momentos=function(x,f)
{
  n=sum(f)
  m=sum(x*f)/n
  mu2=(n*sum(f*x^2)-(sum(f*x))^2)/(n*(n-1))
  mu3=(sum(f*x^3)-3*m*sum(f*x^2)+2*n*m^3)/n
  A=-2+(m*mu3-3*mu2^2)^2/(m*mu2^3)
  if(A>=2)
  {
    alpha=1-0.5*A+sqrt((A^2)/4-1)
  } else{
    alpha=0.5
  }
  beta=(1-sqrt(m*(1-alpha)/mu2))/alpha
  return(c(alpha,beta,m*(1-alpha*beta)/alpha))
}

#Gradiente para la función "optim" para la distribución Binomial
#Negativa Generalizada
gradiente=function(rho,obs,frec)
{
  theta=rho[1]
  beta=rho[2]
  m=rho[3]
  n=sum(frec)
  xbarra=weighted.mean(obs,frec)
  c1=n*(xbarra-theta*(m+beta*xbarra))/(theta*(1-theta))
  k=max(obs)
  n0=frec[1]
  frec=frec[-1]
  obs=obs[-1]
  suma1=0;
  for(x in 2:k)
  {
    suma2=0
    for(i in 1:(x-1))
    {
      suma2=suma2+x*frec[x]/(m+beta*x-i)
    }
  }
}
```

```
suma1=suma1+suma2;
  }
  suma3=0;
  for(x in 2:k)
  {
suma4=0
for(i in 1:(x-1))
{
          suma4=suma4+frec[x]/(m+beta*x-i)
}
suma3=suma3+suma4;
  }
  c2=n*xbarra*log(1-theta)+suma1
  c3=(n-n0)/m+n*log(1-theta)+suma3
  return(-1*c(c1,c2,c3))
}
```

```
#Obtención de EMV para la Distribución Binomial Negativa Generalizada
fit_bng=optim(momentos(obs,frec), vero, gr=gradiente, method = "BFGS",
obs=obs, frec=frec)
```

Prueba de Razón de Verosimilitud para la Distribución Binomial Negativa Generalizada

```
#Carga la librería de funciones MASS de Venables and Ripley.
#Esta biblioteca incluye la función fitdistr que se usará para
#ajustar la distribución Binomial Negativa

library(MASS)

#Prueba de Razon de Verosimilitud para el caso Binomial Negativo.
#Usando valores iniciales estimadores de Momentos
rv_M=function(datos,alpha)
{
  rechaza=-1
  tabla=d.frecuencias(datos)
  frec=tabla$Freq
  obs=tabla$x
  fit_bn=fitdistr(datos,"Negative Binomial")
  fit_bng=try(optim(momentos(obs,frec),vero,gr=gradiente,
method="BFGS",obs=obs,frec=frec),silent=TRUE)
  if((class(fit_bn)[1]=="fitdistr") & fit_bng$convergence==0)
  {
    valor=-2*(fit_bn$loglik+fit_bng$value)
    if(valor>=qchisq(1-alpha,1)) rechaza=1 else rechaza=0
  }
}
```


Apéndices

```
    }
    return(rechaza)
}

#Prueba de Razon de Verosimilitud para el caso Poisson.
#Usando valores iniciales estimadores de Momentos
rv_M=function(datos,alpha)
{
  rechaza=-1
  tabla=d.frecuencias(datos)
  frec=tabla$Freq
  obs=tabla$x
  fit_bn=fitdistr(datos,"Poisson")
  fit_bng=try(optim(momentos(obs,frec),vero,gr=gradiente,
method="BFGS",obs=obs,frec=frec),silent=TRUE)
  if((class(fit_bn)[1]=="fitdistr") & fit_bng$convergence==0)
  {
    valor=-2*(fit_bn$loglik+fit_bng$value)
    if(valor>=qchisq(1-alpha,1)) rechaza=1 else rechaza=0
  }
  return(rechaza)
}

#Prueba de Razon de Verosimilitud para el caso Binomial.
#Usando valores iniciales estimadores de Momentos

#Funcion de verosimilitud Binomial
vero_b=function(par,obs,frec)
{
  n<-max(obs)
  f <- rep(0, length(obs))
  for (i in 1:length(obs))
  {
    f[i] <- frec[i]*(-log(dbinom(obs[i], n, par)))
  }
  sumaf <- sum(f)
  return(sumaf)
}

#Momentos para la distribución Binomial
momentos_b=function(obs,frec)
{
  xbarra=weighted.mean(obs,frec)
  p=xbarra/n
  return(p)
}
```

```
#Prueba de Razon de Verosimilitud
rv_M=function(datos,alpha)
{
  rechaza=-1
  tabla=d.frecuencias(datos)
  frec=tabla$Freq
  obs=tabla$x
  fit_b=try(optimize(vero_b,c(0,1),obs,frec),silent=TRUE)
  fit_bng=try(optim(momentos(obs,frec), vero, obs=obs,
  frec=frec),silent=TRUE)
  if(fit_bng$convergence==0)
  {
    valor=-2*(-fit_b$objective+fit_bng$value)
    if(valor>=qchisq(1-alpha,1)) rechaza=1 else rechaza=0
  }
  return(rechaza)
}
```

Potencia de la Prueba

Para la Distribución Binomial Negativa

```
#Ho: beta=1 vs H1: beta!=1, i.e. Se prueba binomial negativa
#contra binomial negativa generalizada
#Se utiliza la prueba de razón de verosimilitudes generalizada
#alpha es el nivel de la prueba
#rechaza=1, no rechaza=0, Problemas de convergencia=-1
#datos es el vector de observaciones
```

```
n=500
B=1000
theta=0.4
m=2
alpha=0.05
```

```
betas=c(0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9)
potencias=rep(NA,length(betas))
for(j in 1:length(betas))
{
  rechazos=rep(NA,B)
  print(j)
  for(i in 1:B)
  {
```

Apéndices

```
      rechazos[i]=try(rv_M(rgnb(n,theta,betas[j],m),alpha),silent=TRUE)
      print(i)
    }
    potencias[j]=length(which(rechazos==1))/(B-length(which(rechazos==-1)))
  }
  cbind(betas,potencias)
```

Para la Distribución Binomial

```
#Ho: beta=0 vs H1: beta!=0, i.e. Se prueba binomial
#contra binomial negativa generalizada
#Se utiliza la prueba de razón de verosimilitudes generalizada
#alpha es el nivel de la prueba
#rechaza=1, no rechaza=0, Problemas de convergencia=-1
#datos es el vector de observaciones

n=500
B=1000
theta=0.4
m=2
alpha=0.05

betas=c(0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9)
potencias=rep(NA,length(betas))
for(j in 1:length(betas))
{
  rechazos=rep(NA,B)
  print(j)
  for(i in 1:B)
  {
    rechazos[i]=try(rv_M(rgnb(n,theta,betas[j],m),alpha),silent=TRUE)
    print(i)
  }
  potencias[j]=length(which(rechazos==1))/(B-length(which(rechazos==-1)))
}
cbind(betas,potencias)
```

Para la Distribución Poisson

```
#Ho: beta=0.5 vs H1: beta!=0.5, i.e. Se prueba poisson
#contra binomial negativa generalizada
#Se utiliza la prueba de razón de verosimilitudes generalizada
#alpha es el nivel de la prueba
#rechaza=1, no rechaza=0, Problemas de convergencia=-1
```

Apéndices

```
#datos es el vector de observaciones

n=500
B=1000
theta=0.4
m=2
alpha=0.05

betas=c(0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9)
potencias=rep(NA,length(betas))
for(j in 1:length(betas))
{
  rechazos=rep(NA,B)
  print(j)
  for(i in 1:B)
  {
    rechazos[i]=try(rv_M(rgnb(n,theta,betas[j],m),alpha),silent=TRUE)
    print(i)
  }
  potencias[j]=length(which(rechazos==1))/(B-length(which(rechazos==1)))
}
cbind(betas,potencias)
```

Apéndice C: Tablas de Datos de Ejemplos

Centro Deportivo

Tabla .7: Número de personas que se encuentran en el centro deportivo.

Num. de personas	Num. de veces
0	1
1	3
2	3
3	1

Mosquitos transmisores de Malaria en Sudáfrica

Tabla .8: Número de mosquitos transmisores de Malaria en etapa esporozoíto positiva capturados con trampas de luz.

No. of sporozoite-positive mosquitoies in LTC	No. of times observed
0	761
1	21
2	5
3	0
4	2
5	0

Ciclones Tropicales de Categoría 4 y 5 en el Atlántico.

Tabla .9: Número de Ciclones Tropicales de categoría 4 y 5 ocurridos en el Atlántico Norte.

Año	Número de Ciclones
1980	1
1981	1
1982	1
1983	0
1984	1
1985	1
1986	0
1987	0
1988	2
1989	2
1990	0
1991	1
1992	1
1993	0
1994	0
1995	3
1996	2
1997	0
1998	2
1999	4
2000	1
2001	1
2002	1
2003	2
2004	3
2005	4
2006	0
2007	2
2008	2
2009	1