IDEAS BASICAS EN LA PROGRAMACION LINEAL

Por Henry Tucker

La programación lineal es una técnica utilizada para encontrar soluciones a problemas que involucran una serie de desigualdades lineales con alguna función objetiva. Generalmente las desigualdades establecen una relación entre los ingresos o egresos y algunos recursos limitados. La función objetiva trata, por lo común, de maximar las ganancias o de reducir al mínimo los costos. Bajo condiciones muy amplias, el concepto de la programación lineal puede aplicarse a problemas tales como la mezcla de alimento para raciones, para un costo mínimo, reuniendo ciertos requerimientos nutritivos o fijando recursos (tierra, trabajo, capital) a empresas agrícolas para obtener ganancias óptimas.

Para formular las ecuaciones se requiere obtener coeficientes para relacionar los ingresos y egresos y proporcionar valores para los costos o precios. Con la ayuda de computadoras modernas de alta velocidad, este tipo de problemas puede resolverse de manera relativamente fácil, con opción a proveer soluciones alternativas con diferentes coacciones.

La programación lineal es actualmente un instrumento importante en la industria y la agricultura para resolver el problema sobre minimización de costos o maximización de beneficios. Pero es tan sólo un instrumento, y depende de la capacidad del investigador para formular el problema, obtener datos apropiados, y establecer las relaciones entre los factores de entrada y los productos de salida.

El método de programación lineal no es una respuesta para todos los problemas, pero sirve para los casos en que es posible construir un sistema lineal con recursos limitados, costos y valores para todos los factores.

El problema general es: Dado un juego de m desigualdades lineales o ecuaciones en r variables, calcular los valores no negativos de las variables que satisfacen las restricciones y maximizan o minimizan alguna función lineal de las variables. Por lo tanto, se tienen algunas suposiciones en este método:

a) Relaciones lineales entre las entradas y las salidas.
b) Los coeficientes entre las entradas y las salidas son fijos.
c) Los precios o valores usados son constantes.
d) Hay límites, máximo o mínimo, en las cantidades de los factores usados en las distintas actividades.
e) Hay una función lineal que debe maximizarse o minimizarse.

Así pues, una programación lineal contiene tres componentes: Un objetivo, los métodos alternativos para alcanzar el objetivo y los recursos restringidos. Con estos tres componentes se formula un sistema entre las entradas y las salidas.

Vamos a exponer un ejemplo general sin referencia a un problema específico, para entender lo que ocurre cuando usamos las ideas de programación lineal.

Supongamos que hay un problema formulado de la manera siguiente:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15 \qquad (1) \qquad\qquad X_1, X_2 \geq 0 \qquad (3)$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10 \qquad (2) \qquad \text{Máx.:} \quad Z = 5X_1 + 3X_2 \qquad (4)$$

donde X_1 y X_2 son dos variables de las entradas y las cantidades de la derecha de la desigualdad son los límites de las salidas. Gráficamente se tiene:

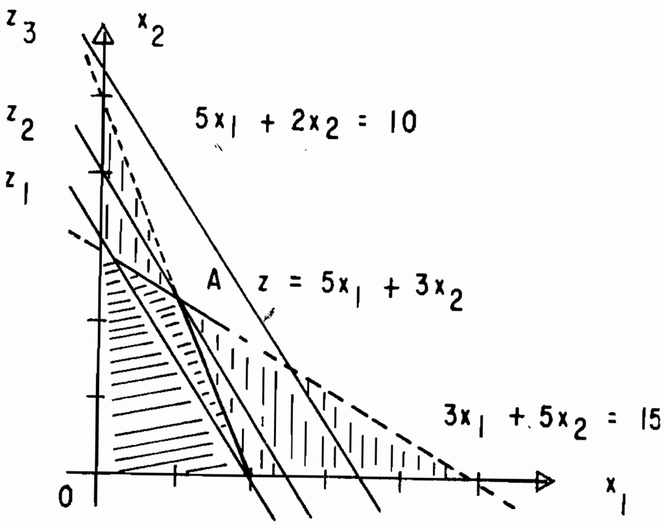

FIGURA No. 1

El área bajo la línea $3X_1 + 5X_2 = 15$ satisface la ecuación (1) y el área bajo la línea $5X_1 + 5X_2 = 10$ satisface la ecuación (2). El área doble sombreada satisface ambas ecuaciones y si usamos los valores en el primer cuadrante la ecuación (3) tiene valores aceptables.

La función $Z = 5X_1 + 3X_2$ es una línea recta; si Z tiene valores diferentes, obtendremos un número de líneas con pendiente igual —3/5, independiente del valor de Z.

En la gráfica es posible ver la solución óptima que se encuentra en el punto A, y los valores de X_1 y X_2 para una línea que pase por este punto, son $X_1 = 1$ y $X_2 = 2.4$ aproximadamente. Podemos llegar a la solución por álgebra usando (1) y (2) como ecuaciones simultáneas:

$$3X_1 + 5X_2 = 15$$
$$5X_1 + 2X_2 = 10$$
$$X_1 = 1.05 \; X_2 = 2.37$$

y substituyendo los dos valores en la función objetivo, obtenemos $Z = 12.4$ para el valor máximo. Con las tres desigualdades (1), (2), (3) y una función objetiva diferente obtendremos otras soluciones. Si escogemos la función:

$$Z = 2.5X_1 + X_2$$

obtendremos una línea paralela a la frontera de la derecha del área sombreada y entonces tenemos una serie de valores de X_1 y X_2 donde $X_1 = 2$, $X_2 = 0$, hasta $X_1 = 1.05$, $X_2 = 2.37$ y valores de $Z = 5$; o sea, existen varias alternativas con el mismo resultado.

A veces no hay una solución única, o solución confinada con valores negativos, o las regiones sombreadas no tienen un área común y por tal motivo no existe una solución. Generalmente si la formulación del problema es correcta, sin que existan contradicciones entre las ecuaciones, habrá un resultado factible y debe ser óptimo con respecto a la función objetiva.

Pero el problema gráfico es más difícil y los casos de solución óptima están en una esquina de la región, llamándose este caso un juego convexo; los métodos de cálculo no pueden identificar cuáles de los puntos son máximos o mínimos óptimos. Los métodos usados son técnicas iterativas que producirán una solución óptima en un número de etapas finitas. No se dispone de tiempo para explorar los detalles de los métodos, pero debemos concentrarnos en la formulación, aplicaciones y limitaciones de la programación lineal.

Por ejemplo, si quisiéramos formular una ración para ganado, usando varios ingredientes que contengan una cantidad mínima de los nutrientes (proteínas, minerales, aminoácidos, grasas, etc.) con un costo mínimo al mismo tiempo, esta ración no puede calcularse más que para porcentajes fijos de algunos ingredientes y deben tenerse los máximos de los otros ingredientes. El primer problema es la construcción de un sistema lineal de las desigualdades, que puede resolverse por uno de los métodos apropiados.

Para cada ingrediente, tenemos el porcentaje del i-ésimo nutriente que aporta, lo que llamamos P_{ij} donde $i = 1 \ldots r$, número de nutrientes y $j = 1 \ldots k$, número de ingredientes. Poniendo b_i = al requisito del j-ésimo ingrediente, formamos un sistema de r ecuaciones.

$\Sigma X_j P_{ij}, \leq = \geq b_i$, donde se usará solamente uno de los signos para cada b_i

TABLA I

INGREDIENTES	NUTRIENTES			
	FIBRA	PROTEINA — %	GRASA	COSTOS — Pesos-Ton.
Maíz	2.0	9.0	5.1	940
Harina de soya	6.0	45.8	4.1	1 600
Harina de pescado	1.0	61.3	4.0	2 850
Avena	11.0	11.8	4.4	800
Requisitos (%)	$\leq$ 8.0	$\geq$ 35.0	$\geq$ 1.5	

Con los datos de la Tabla I, obtenidos de las fuentes de análisis de alimentos, y suponiendo que los requisitos han sido establecidos por un investigador, escribiríamos:

$$2.0X_1 + 6.0X_2 + 1.0X_3 + 11.0X_4 \leq 8.0$$

para satisfacer el requisito de fibra, donde X_i representa el peso del i-ésimo ingrediente; de la misma manera, podemos formar las siguientes ecuaciones:

$$9.0X_1 + 45.8X_2 + 61.3X_3 + 11.8X_4 \geq 35.0$$

y $$5.1X_1 + 4.1X_2 + 4.0X_3 + 4.4X_4 \geq 1.5$$

se busca una solución con todas las X's $\geq$ (positivas) y una restricción:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1\,000$; para obtener una tonelada de la ración alimenticia. Si las tres desigualdades se convierten a ecuaciones, una solución es posible, pero no es segura sin un examen para establecer la consistencia en el sentido matemático. En este caso podríamos tener una solución factible, pero no optimizada con respecto a costos. Por consiguiente, debemos calcular una ración para un costo mínimo que en este caso se representa como:

$Z = \Sigma C_i X_i$ Z será maximizada o minimizada y para este caso

$$Z_0 = 0.940X_j + 1.600X_2 + 2.850X_3 + 0.800X_4$$

donde los coeficientes son los precios en pesos/kg de los ingredientes.

Ahora debemos cambiar las desigualdades a igualdades, introduciendo las variables de holgura para compensar las diferencias entre las cantidades exactas que se necesitan para satisfacer los requisitos en la solución factible.

$$2.0X_1 + 6.0X_2 + 1.0X_3 + 11.0X_4 + 1X_5 + 0X_6 + 0X_7 = 8.0$$
$$9.0X_1 + 45.8X_2 + 61.3X_3 + 11.8X_4 + 0X_5 - 1X_6 + 0X_7 = 35.0$$
$$5.1X_1 + 4.1X_2 + 4.0X_3 + 4.4X_4 + 0X_5 + 0X_6 - 1X_7 = 1.5$$

donde X_5, X_6 y X_7 se llaman variables de holgura o de disposición. Los coeficientes de X_6 y X_7 son negativos porque necesitamos un valor máximo de los dos requisitos y aceptamos solamente valores de $X_i = 0$.

En la notación de matrices tenemos:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 1 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{12} & P_{23} & P_{24} & 0 & -1 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

o $PX = B$

y $$Z = [C_1 \;\; C_2 \;\; C_3 \;\; C_4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix}$$

donde C_i = costo para el i-ésimo ingrediente. Aquí los valores de X_5, X_6 y X_7 representan cantidades (en déficit o en exceso) gastadas. Con matrices podemos usar varios teoremas para resolver los valores de X.

A veces tenemos otras restricciones, por ejemplo, quisiéramos que esta ración tenga $\leq 10\%$ de harina de soya, $\geq 15\%$ de harina de pescado y $\geq 20\%$ de avena. Podemos introducir las ecuaciones adicionales con estas restricciones:

$$X_2 \leq 100, \quad X_3 \geq 150, \quad X_4 \geq 200$$

pero nuevamente necesitamos estar seguros de las condiciones de consistencia en el sistema anterior. Para incluir las tres desigualdades de las ecuaciones y formar un sistema consistente, hacemos un nuevo grupo de las actividades artificiales. La construcción del sistema total y la formación de las tablas se explica con detalles en las referencias generales y específicas. Con técnicas especiales es posible determinar si el sistema contiene inconsistencias o redundancias. Con la inclusión de precios artificiales, es posible forzar algunas de las variables en la primera etapa o excluir el uso de cantidades en exceso de los límites específicos.

Cuando se tiene completo el sistema, existen algunos métodos para resolver este problema y obtener una solución óptima, si existe. El método más fácil se llama SIMPLEX, inventado por George Danzi en 1947 y consiste en una serie de operaciones lineales con las ecuaciones; después de cada prueba, tenemos una distribución de los ingredientes que es satisfactoria con respecto a los requisitos y restricciones, calculándose también el costo. Una segunda prueba mostrará una nueva distribución y el costo correspondiente. Si el costo es menor que el de la solución anterior, será posible continuar de la misma manera hasta que ya no haya una diferencia importante de costos entre dos soluciones sucesivas.

Con una calculadora, es posible calcular un problema con diez ecuaciones en un día, pero la escala del trabajo aumenta a la segunda potencia (con 20 variables, necesitamos cuatro veces más tiempo que con 10 variables). Si los precios varían es necesaria una nueva solución y por eso las aplicaciones de la programación lineal habían estado restringidas hasta hace poco, en que los programas se desarrollaron para las computadoras electrónicas.

Hoy tenemos programas generales para problemas de programación lineal, limitados por la memoria o capacidad de las máquinas. Generalmente el investigador puede presentar una tabla de los coeficientes (P_{ij}), requisitos (b_i) precios (C_i) y restricciones. En el Centro de Cálculo, y después de la preparación de las tarjetas de control de las ecuaciones, parámetros, etc., la solución puede producirse en unos pocos minutos. Varias alternativas, con otras condiciones o precios, pueden explorarse cambiando las tarjetas apropiadas.

¿Dónde puede aplicarse el método de Programación Lineal? En la Industria del Petróleo, donde se produce gasolina de grados diferentes, aceites, grasas y otros productos, como distintos tipos de aceites crudos. El análisis de cada aceite crudo da porcentajes de productos disponibles. Las demandas para los distintos productos representan los requisitos y la capacidad de las refinerías con restricciones. Con la Programación Lineal, es posible controlar las operaciones y cambiarlas cuando sea necesario. En las industrias animales, las raciones pueden cambiarse con cada revisión de precios de los ingredientes, manteniendo la misma calidad con respecto a los valores nutritivos. En Economía Agrícola hay mucho interés en el uso de Programación Lineal para organizar granjas con mayor eficiencia.

En estos casos, se necesita considerar cada cultivo y grupo de animales como actividades, con demandas de trabajo, capital, tierra, etc., en estaciones específicas. En problemas de transporte hay rutas entre puertos usando barcos, trenes, camiones o las combinaciones entre ellos, cada vehículo con capacidad y velocidades diferentes. Con demandas de servicios para cada ruta o puerto, el problema es la asignación de los vehículos para transportar los bienes o personas, bajo la restricción de minimizar el tiempo no productivo. De la misma forma, el ejército considera problemas logísticos con tropas, existencias o armas, como una extensión del problema de transporte. Hay otras aplicaciones en la industria y la agricultura en las que faltan solamente los datos suficientes para establecer los coeficientes relativos a las entradas y salidas.

Las ventajas en muchos casos son evidentes, pero hay limitaciones y desventajas y por eso ha sido necesario extender la idea en dos direcciones a casos no-lineales y situaciones donde los coeficientes pueden cambiarse entre las interacciones, llamada en este caso Programación Dinámica. Mientras que resulta más fácil formular los sistemas apropiados en los dos casos anteriores, el problema de resolverlos es más complicado.

La parte que juega la computadora en todos los métodos de programación, es evidente. Aunque la computadora es tan sólo un instrumento de cálculo, le da al hombre una extensión grande en la capacidad y tiempo para explorar varios aspectos. Cuando la solución óptima está por realizarse, la computadora puede tomar una decisión directa. Por ejemplo, en los alimentos para ganado, es posible hacer una conexión entre la gerencia, la computadora y el molino. Con un programa lineal que se queda en la computadora, nuevos precios entran por una tarjeta y la nueva ración calculada. Al mismo tiempo, las instrucciones se transmitirán al molino y las cantidades de los ingredientes se medirán y mezclarán automáticamente. Con los datos de las ganancias en los lotes de animales, pueden calcularse las eficiencias relativas de las raciones. Así la gerencia puede tener control sobre todos los aspectos de las operaciones.

Claro que la programación lineal no es una panacea para todos los problemas en esta área. Nos falta mucha información sobre las interacciones entre algunos elementos del modelo, y por eso los efectos de las combinaciones de los factores pudieran no ser lineales. A veces las restricciones no son realistas y por lo tanto no existe una solución posible o la solución no es práctica. Todos los resultados son dependientes en la función de los factores de entrada en unidades de las medidas necesarias. En algún caso (hombres, maquinarias, animales), no es posible dividir los factores y no tenemos una solución óptima.

La programación lineal no es un método estadístico, porque el sistema es determinante y los elementos aleatorios están ausentes. Si los factores son variables al azar, el problema es más difícil y no existen métodos exactos para resolver este problema.

Sin embargo, vale la pena para un investigador considerar las aplicaciones del método de la Programación Lineal a problemas reales. En cualquier caso, tiene la responsabilidad para la formulación del problema y ver si los resultados son factibles y prácticos.

Referencias citadas

CHARNES, A., COOPER, W. W. y HENDERSON, A. (1953.) *An introduction to linear programming.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

DORFMAN, ROBERT. (1951.) *Application of linear programming to the theory of the firm.* University of California Press, Berkeley, Calif.

HEADY, E. O. & CANDLER, W. (1958.) *Linear programming methods.* Iowa State University Press, Ames, Iowa.

HADLEY, G. (1962.) *Linear programming.* Addison-Wesley Pub. Co.

VAJDA, S. (1950.) *Theory of games and linear programming.* John Wiley & Sons, Inc., New York.