



COLEGIO DE POSTGRADUADOS
INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN
EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

CAMPUS MONTECILLO

FORESTAL

**Modelos de volumen y crecimiento en altura dominante
para *Pinus cooperi* Blanco en el estado de Durango, México.**

FRANCISCO CRUZ COBOS

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL

PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

MONTECILLO, TEXCOCO, ESTADO DE MÉXICO

2007

La presente tesis titulada “Modelos de volumen y crecimiento en altura dominante para *Pinus cooperi* Blanco, en el Estado de Durango, México.” realizada por el alumno Francisco Cruz Cobos, bajo la dirección del Consejo Particular indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

FORESTAL

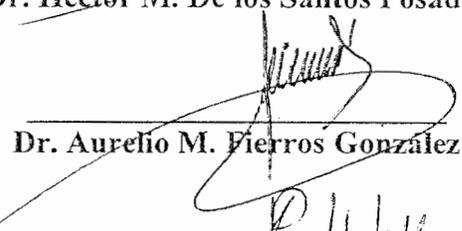
CONSEJO PARTICULAR

**CONSEJERO
y
DIRECTOR DE TESIS**



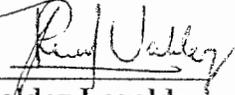
Dr. Héctor M. De los Santos Posadas

ASESOR



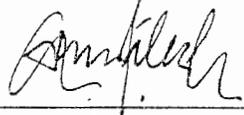
Dr. Aurelio M. Fierros González

ASESOR



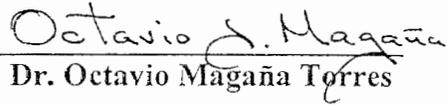
Dr. J. René Valdez Lazalde

ASESOR



Dr. Félix González Cossío

ASESOR



Dr. Octavio Magaña Torres

Montecillo, Texcoco, Estado de México, 2007

Agradecimientos

Deseo expresar sinceros agradecimientos :

A la Dirección General de Educación Superior Tecnológica (DGEST) , al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) y al Instituto Tecnológico de El Salto, por el apoyo brindado para realizar mis estudios de Doctorado.

Al Colegio de Postgraduados por todas las facilidades otorgadas para llevar a feliz término mis estudios.

Al Dr. Héctor M. De Los Santos por compartir conmigo su tiempo y conocimientos, quien además de realizar una revisión exhaustiva de este trabajo, lo mejoró sustancialmente.

Al Dr. J. René Valdez Lazalde, por su muestra de amistad y sugerencias en la revisión del presente trabajo.

A los Drs. M. Aurelio Fierros González, Octavio Magaña Torres y Félix González Cossío, por sus palabras de aliento, valiosa asesoría y participación en la revisión del presente estudio.

Al Dr. Francisco Javier Hernández, por todo el apoyo para la obtención de la base de datos.

Al Drs. Jesús Jasso Mata, y Arnulfo Aldrete, por todas las atenciones y apoyo brindado desde mi llegada al Colegio de Postgraduado.

A todos los profesores del Postgrado Forestal y personal administrativo, quienes siempre me mostraron su amistad y apoyo.

A mis compañeros del Colegio de Postgraduados y entrañables amigos Rosendo A. Velásquez Cabrera, Joaquín Gómez Tejero y Jaime Galán.

Dedicatorias

A Dios por darme la vida, salud y la fuerza necesaria para soportar la lejanía de mi familia.

A Maritza mi linda esposa, por su sacrificio y comprensión, por que a pesar de pasar momentos muy difíciles durante mi ausencia, siempre me alentó hacia adelante.

A mis hijos Francisco, Aldo Ulises y Daniel de Jesús, razón de mi existir, por pagar el precio de mi reto personal y profesional.

*A mis Padres Rafael (†) y Maria, por darme todo, la vida.
A mi hermano Toño (†). ¡ Te extraño !*

A todos mis hermanos, cuñados, sobrinos y suegros, por sus muestras de apoyo, cariño y buenos deseos para el logro de unos de mis más preciados anhelos.

A Humberto Name y José Angel Adame, que con ellos he aprendido lo que significa la palabra amigo.

CONTENIDO

RESUMEN.....	i
ABSTRACT.....	ii
CAPÍTULO I.....	1
1. INTRODUCCIÓN GENERAL.....	1
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 AHUSAMIENTO Y VOLUMEN.....	1
1.3 CALIDAD DE SITIO.....	3
1.3.1 Clasificación del sitio.....	4
1.3.2 Índice de sitio.....	5
1.3.3 Curvas de índice de sitio.....	6
1.4 MODELOS DE EFECTOS MIXTOS.....	7
1.4.1 Antecedentes del uso de los modelos de efectos mixtos en el ámbito forestal.....	8
1.5 ESPECIE EN ESTUDIO.....	10
1.6 OBJETIVOS.....	11
1.6.1 Objetivo general.....	11
1.6.2 Objetivos específicos.....	11
1.7 LITERATURA CITADA.....	12
CAPÍTULO II.....	15
2. SISTEMA COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO-VOLUMEN PARA <i>Pinus cooperi</i> BLANCO EN DURANGO, MÉXICO.....	15
2.1 RESUMEN.....	15
2.2 ABSTRACT.....	16
2.3 INTRODUCCIÓN.....	17
2.4 MATERIALES Y MÉTODOS.....	18
2.4.1 Datos de volumen y ahusamiento.....	18
2.4.2 Desarrollo del modelo compatible ahusamiento-volumen.....	19
2.4.3 Estrategia de ajuste.....	23
2.5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	27
2.6 CONCLUSIONES.....	32
2.7 LITERATURA CITADA.....	33
CAPÍTULO III.....	38
3. MODELO DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE PARA <i>Pinus cooperi</i> BLANCO EN DURANGO, MÉXICO.....	38
3.1 RESUMEN.....	38
3.2 ABSTRACT.....	39
3.3 INTRODUCCIÓN.....	40
3.4 MATERIALES Y MÉTODOS.....	42
3.4.1 Área y especie de estudio.....	42

3.4.2	Funciones de crecimiento seleccionadas.....	44
3.4.3	Formulación bajo Modelos de Efectos Mixtos	46
3.4.4	Estrategia de ajuste y construcción del modelo conjunto	46
3.5	RESULTADOS.....	51
3.6	DISCUSIÓN.....	54
3.7	CONCLUSIONES	55
3.8	BIBLIOGRAFÍA.....	56
CAPÍTULO IV.....		67
4.	CONCLUSIONES GENERALES	67
4.1	MODELO COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO-VOLUMEN.....	67
4.2	MODELOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE	68

ÍNDICE DE TABLAS

No. Tabla	Página
2-1. Parámetros estimados, errores estándar y niveles de significancia muestral (α) para las ecuaciones de ahusamiento Cielito 1 (1) y Cielito 1 Modificada (6), ajustadas por MCO...28	
2-2. Parámetros estimados, errores estándar (S_{β_i} y S_{δ}) y nivel de significancia muestral (α) para las ecuaciones compatibles de volumen del modelo Cielito 1 (4) y Cielito 1 Modificado (10), ajustadas por MCO.....28	
2-3. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos de ahusamiento y volumen, ajustados simultáneamente con efectos mixtos a través de RMV. CIA es el Criterio de Información de Akaike y CIB es el Criterio de Información Bayesiano (Pinheiro y Bates, 2000).....30	
2-4. Comparación de la eficiencia del modelo de volumen, con y sin efectos aleatorios en una muestra de 10 árboles.....32	
3-1. Modelos de DA y DAG parametrizados como modelos de valor medio esperado con efectos mixtos.....58	
3-2. Ajuste de los MEM a los datos edad-altura por tipo de suelo y su posición en función del ajuste.....59	
3-3. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos 17 y 18 bajo el enfoque del modelo conjunto.....60	
3-4. Ajuste de los MEM a la base de datos edad-altura sin considerar los tipos de suelos.....61	
3-5. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos de referencia 19 y 20.62	
3-6. Ajuste total de los modelos conjunto y del modelo de referencia.63	

ÍNDICE DE FIGURAS

No. Figura	Página
2-1. Diámetro sobre el fuste y volumen comercial vs. altura del fuste para los árboles muestreados.....35	
2-2. Dispersión de los residuales del modelo de ahusamiento Cielito 1 en su forma original (1) y modificada (6), ajustados por MCO.....36	
2-3. Dispersión de los residuales del modelo de volumen Cielito 1 en su forma original (4) y modificada (10), ajustados por MCO.....36	
2-4. Dispersión de los residuales de la ecuación de ahusamiento (6) y volumen (10), ajustadas simultáneamente con efectos mixtos.....37	
3-1. Datos de los análisis tróncales como series de crecimiento.....63	
3-2. Datos agrupados por tipo de suelo y contrastados con los datos en general.....64	
3-3. Modelo combinado (17) vs. modelo de referencia (19).....65	
3-4. Modelo combinado (18) vs. el modelo de referencia (20).....66	

RESUMEN

Se presenta el desarrollo de un sistema compatible de volumen comercial-ahusamiento para volumen sin corteza, y el ajuste de modelos de crecimiento en altura dominante para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. El sistema compatible propuesto se basa en un modelo lineal polinómico previamente usado en la región y modificado en función de los datos para añadir flexibilidad; se ajustó simultáneamente para compensar la variación entre ahusamiento y volumen comercial acumulado. La estructura incluye efectos mixtos (EM) para controlar la variabilidad debida al árbol, corregir heterocedasticidad y lograr predicciones precisas en árboles de alto valor comercial. Los resultados indican que el ajuste simultáneo con EM mejora notablemente la capacidad predictiva en la parte baja del fuste y reduce los errores estándares de los parámetros estimados.

Para el ajuste de los modelos de altura dominante se usaron estructuras de Diferencia Algebraica (DA) y DA Generalizada (DAG) derivadas de los modelos de Chapman-Richards y Hossfeld IV, adicionalmente se ensayó una estrategia de ajuste que facilita la selección del tipo de la familia de curvas de índice de sitio. Para ello primeramente se agrupan las alturas por tipo suelo y posteriormente las funciones propuestas de DA y DAG se ajustan como estructuras de valor medio esperado bajo modelos de efectos mixtos en cada tipo de suelo. Finalmente se combinan las mejores estructuras por tipo de suelo y se ajustan al total del conjunto de los datos, compensando así las pérdidas en grados de libertad al ajustar cada modelo por separado. El enfoque usado mejora la calidad de ajuste total y se pueden describir simultáneamente patrones de crecimiento diversos.

ABSTRACT

The dissertation comprises a compatible volume taper system for inside bark volume and a dominant height models for site index on *Pinus cooperi* Blanco at Durango Mexico.

The volume-taper compatible system was based on a polynomial lineal model previously used in the area but modified based on data information to add flexibility. Volume and taper were fitted simultaneously to compensate for the correlated errors between diameter changes over height and the accumulated merchantable volume. The structure used includes mixed effects structure (MES) to control tree to tree variability, correct for heterocedasticity and produce accurate volume estimates. The results suggest that the MES improves noticeable the predictive ability at the lower part of the stem while reducing the standard errors of the estimated parameters.

For the dominant height models models of Algebraic difference (AD) and generalized AD based on the Chapman-Richards and Hossfeld IV models were used and a new fitting strategy to easy family curve selection is proposed. First the dominant height data is grouped based on the most relevant and easy to identify environmental factor (soil type in this case) and then the proposed ADA and GADA functions are fitted as mean value structures under non-linear mixed effect models (NLMEM) in each soil type. Finally, the best fitted structures per soil type are combined into one and fitted simultaneously with NLMEM. In this way the overall model compensate for the losses in degrees of freedom lost during the separate fittings and provides a flexible structure that allows multiple patterns in a single fit.

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN GENERAL

1.1 GENERALIDADES

La creciente demanda de recursos forestales exige día a día un incremento de la producción de madera y derivados del monte. Esto unido a su creciente utilización como medio de esparcimiento y al importante papel protector que la cubierta vegetal tiene contra la erosión y para la conservación de ecosistemas, requieren del desarrollo de normas precisas de actuación y de instrumentos técnicos que faciliten la gestión de estos recursos, y que al mismo tiempo optimicen su uso y aprovechamiento integral.

Para planificar las actuaciones silvícolas es imprescindible una buena estimación del crecimiento de las masas, así como de su estructura, que anticipe los efectos de las intervenciones. Los modelos de crecimiento son una herramienta fundamental para los silvicultores, ya que permiten predecir la evolución de las masas, facilitando la toma de decisiones y la planificación a mediano y a largo plazo.

1.2 AHUSAMIENTO Y VOLUMEN

El primer paso en la secuencia de decisiones del manejo forestal es la definición del producto o productos finales, esto involucra establecer especificaciones y características de los productos en el momento de la venta y definir las características que deberá tener el árbol para que se le considere producto (Mendoza, 1993). Esto obliga a que el administrador forestal conozca además del volumen a extraer, la distribución de los productos disponibles para la industria. Esta distribución generalmente está determinada por las dimensiones del diámetro y la longitud de los troncos. Las dos metodologías más difundidas para establecer el volumen de

un árbol son las tablas o ecuaciones de volumen y las funciones de ahusamiento. La primera se define como una expresión tabulada que establece los volúmenes de árboles de acuerdo a una o más dimensiones fáciles de medir, tales como el diámetro normal, la altura y la forma (Husch *et al.*, 1972). La importancia de las tablas de volumen radica en que constituyen la base de los inventarios forestales, que a su vez son el cimiento de la silvicultura (Romanh *et al.*, 1987). El ahusamiento por su parte se define como el coeficiente de estrechamiento del diámetro con el incremento en altura. Este tipo de ecuaciones estiman en forma directa el diámetro a cualquier altura o la altura a cualquier diámetro y son útiles para cubicar el volumen del fuste hasta cualquier diámetro mínimo deseado, por lo que brindan información para estimar la porción de volumen comercial, o de ciertas características. Son consideradas la forma más flexible y precisa de obtener el volumen de un árbol (Clutter *et al.*, 1983; Torres *et al.*, 1993).

Lynch *et al.* (1992) establecen que una vez definida una ecuación de ahusamiento es posible obtener una ecuación de volumen mediante su integración matemática, la cual permite pueda ser usada para obtener el volumen a cualquier segmento del fuste. Dada la estrecha relación de éstas (ecuaciones de ahusamiento y volumen) se les conoce como **ecuaciones compatibles**.

Rentería (1995) y Torres y Magaña (2001) presentan una amplia lista de modelos de predicción de volumen y ahusamiento que han sido utilizados con éxitos en diferentes países y especies, así mismo dividen a las ecuaciones de ahusamiento en dos grupos:

1. Aquellas que describen los cambios en diámetro desde el nivel del suelo hasta la punta del árbol mediante funciones simples. Tales funciones tienen la ventaja de que son fáciles de ajustar, usualmente fáciles de integrar para calcular el volumen, y fáciles de reordenar para el cálculo de altura comercial.

2. Aquellas que usan diferentes modelos para distintas partes del fuste e integran tales modelos de forma que sus primeras derivadas son igual al punto de intersección; estos modelos son llamados comúnmente modelos segmentados. Su ventaja es que predicen diámetros con menos sesgo que las funciones simples en la mayor parte del fuste.

En el caso de un sistema compatible de ahusamiento-volumen se tienen dos ecuaciones con los mismos parámetros. Si ambas ecuaciones se ajustan mediante el procedimiento de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) es necesario decidir que es más eficiente, ajustar los modelos con base al volumen comercial o al ahusamiento. Sabemos que si dos ecuaciones son compatibles implican que están relacionadas, y por tanto los componentes del error están correlacionados. En este caso MCO no producirán estimadores teóricamente robustos. La teoría econométrica ofrece solución a este problema ya que métodos de ajuste tales como ecuaciones aparentemente no relacionadas (SUR, por sus siglas en inglés) o máxima verosimilitud con información completa (FIML, por sus siglas en inglés) pueden ser usados para obtener estimadores de parámetros más consistentes y asintóticamente eficientes (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2001).

1.3 CALIDAD DE SITIO

Una buena planificación del manejo forestal requiere proyecciones confiables de crecimiento y rendimiento. En muchas situaciones es suficiente el ajuste de curvas de crecimiento simples que describan el curso de variables de rodal en el tiempo. Con manejo más intensivo, sin embargo, estas variables son manipuladas a través de intervenciones silvícolas que pueden variar en fechas e intensidad, por lo que se hace necesario predecir el comportamiento de rodales considerando factores económicos y de mercado, lo que obliga a

conocer el potencial productivo de los diferentes sitios. Esta potencialidad, expresada en producción de madera para una especie particular o para un tipo de bosque, en un tiempo dado, ha sido definida como **calidad de sitio** (Clutter, 1980). El manejo forestal eficiente exige la zonificación del potencial forestal de los suelos para orientar a los productores en la selección de los sitios y especies mejor adaptadas.

1.3.1 Clasificación del sitio

Los sitios pueden ser clasificados de manera cualitativa y cuantitativa. Siempre que sea posible es preferible una clasificación cuantitativa para evitar la subjetividad. En el contexto de la producción de madera, la calidad de sitio se usa para definir el potencial para producir madera dada una especie o un tipo forestal. Esta definición de calidad de sitio tiene sentido sólo para la o las especies sujetas a condiciones de manejo específicas; es decir, lo que es bueno para una especie no necesariamente lo es para otra. Lo anterior implica la necesidad de medir e interpretar la calidad del sitio con fidelidad ya que en conjunto con la densidad del rodal controla el tamaño, cantidad y valor de los productos. La calidad de un sitio puede ser estimada de dos maneras. A través de la medición de los factores que definen el crecimiento de los árboles (factores causales) o a través de su respuesta, es decir, midiendo alguna característica de los árboles. De cualquier modo ambos métodos son interactuantes; la respuesta modifica el ambiente y viceversa.

1.3.2 Índice de sitio

La variable más usada para determinar la calidad de un sitio forestal es la **altura dominante del rodal**. El diámetro es poco fiable dado que es muy sensible a la densidad del rodal (Husch *et al.*, 1972). Para muchas especies el crecimiento en altura de los árboles más grandes en el rodal está correlacionado con la capacidad productiva del sitio y es poco afectado por la densidad del rodal y las cortas intermedias. Naturalmente se verá afectado en los inusuales aclareos “por lo alto”. Por ello, la altura predominante del rodal y sus expresiones equivalentes (altura “top”, altura media dominante) son las más comúnmente usadas para clasificar sitios por su calidad.

La relación de esta altura con la edad “a una edad constante” (denominada edad base) es ampliamente usada en la evaluación de la calidad del sitio. En rodales coetáneos puros es llamado **índice de sitio**.

El éxito del índice de sitio se debe a que:

- La altura es un componente del volumen, y por lo tanto es proporcional a éste
- La altura y la edad son relativamente fáciles de medir
- El crecimiento en altura está poco afectado por la densidad del rodal
- El índice de sitio provee una expresión numérica para la calidad de sitio

La relación entre la altura y la edad, en bosques coetáneos puros originados de monte alto -para un sitio constante-, siempre tiene la forma de una curva sigmoídea. Para definir los parámetros del modelo de crecimiento se pueden utilizar información de parcelas temporales, parcelas permanentes, análisis troncales o una combinación de ellos. Lo ideal es medir parcelas permanentes. Si ello no es posible se pueden utilizar análisis troncales y finalmente si tampoco es posible, se puede utilizar parcelas temporales. Esa jerarquía en la selección de la

información tiene que ver con la calidad de la información base y de los supuestos con que se construyan los modelos.

1.3.3 Curvas de índice de sitio

Tradicionalmente las curvas de índice de sitio han sido usadas para predecir el promedio de la altura a una edad de interés. El enfoque del índice de sitio es suficientemente conocido y a través de los años varios métodos de construcción de curvas de índice de sitio han sido propuestos y discutidos; destacan el Método de la Curva Guía, la Predicción de Parámetros y la Diferencia Algebraica (Clutter *et al.*, 1983).

En el Método de la Diferencia Algebraica (DA) la hipótesis central es que se pueden hacer variar las asíntotas o las tasas de crecimiento en los sitios pero no ambas, esto implica que no se pueden construir modelos polimórficos y con múltiples asíntotas (Cieszewski, 2001). De manera general el número de ecuaciones de DA que se pueden obtener depende del número de parámetros que el modelo básico contenga; una función anamórfica cuando la ecuación se resuelve para el parámetro asíntótico y n funciones polimórficas cuando se resuelve para los parámetros de crecimiento.

El concepto del índice de sitio parte del supuesto que para una especie y región dada, las variaciones en los patrones de crecimiento-altura pueden ser descritos por una familia de curvas (García, 1983). Reconociendo el hecho de que las condiciones suelo, ecológicas y factores climáticos determinan diferentes productividades de sitio, los modelos de índice de sitio biológicamente realistas requieren la habilidad para expresar asíntotas variables y polimorfismo en las curvas (Cieszewski y Bailey, 2000), lo cual dio lugar al desarrollo de otro método de construcción de curvas de índice de sitio conocido como Diferencia Algebraica Generalizada (DAG). Con este enfoque se pueden obtener ecuaciones más flexibles y

dinámicas que con el método de DA, ya que permite describir polimorfismo y múltiples asíntotas simultáneamente, propiedades importantes que deben ser consideradas en las ecuaciones de índice de sitio durante la modelación de tendencias más complejas del crecimiento. Esta metodología es ampliamente discutida por Cieszewski y Bailey (2000).

1.4 MODELOS DE EFECTOS MIXTOS

Los modelos de efectos mixtos son una herramienta poderosa y flexible para el análisis de datos agrupados, los cuales se originan en áreas diversas como, la agricultura, la biología, la economía, la manufactura y la geofísica.

Los modelos estadísticos pueden ser expresados como modelos lineales que incorporan efectos fijos y efectos aleatorios. Los efectos fijos son parámetros asociados con la población o con niveles repetidos de factores experimentales; los efectos aleatorios por su parte son asociados con unidades experimentales individuales tomadas al azar de una población. A un modelo que considera tanto los efectos fijos como los aleatorios se le conoce como un modelo de **efectos mixtos**. Estos modelos son usados principalmente para describir la relación entre una variable respuesta y algunas covariables en datos agrupados de acuerdo a uno o más factores de clasificación, tales grupos de datos incluyen los análisis longitudinales, variables remedidas, diseños en bloques, etc. (Pinheiro y Bates, 2000)

La idea conceptual de estos modelos es que cada individuo o unidad experimental tenga su propia línea de regresión y que los parámetros poblacionales sean el promedio de los coeficientes individuales.

Existen diferentes notaciones para representar un modelo de efectos mixtos. Sin embargo, la representación más usada es la que se presenta enseguida:

$$Y_i = X_i B + Z_i b_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Donde:

Y_i = vector n_i -dimensional de la variable respuesta

B = vector p -dimensional de efectos fijos

b_i = vector q -dimensional de efectos aleatorios

X_i = matriz de diseño del i -ésimo grupo (de medida $n_i \times q$)

Z_i = matriz de efectos aleatorios, asociado al i -ésimo grupo

Bajos los siguientes supuestos:

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad b_i \sim N(0, \Sigma)$$

Existen dos métodos de ajuste para estos modelos

- Estimación por máxima verosimilitud restringida (RMLE, por sus siglas en inglés)
- Estimación por máxima verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés)

1.4.1 Antecedentes del uso de los modelos de efectos mixtos en el ámbito forestal

Gregoire y Schabenberger (1996) ajustaron un modelo no lineal de efectos mixtos para predecir el volumen acumulado de los fustes, usando datos correlacionados espacialmente dentro de los árboles, el ajuste se realizó por RMLE y por Estimación de Ecuaciones Generalizadas y demostraron que ambos métodos son muy similares y presentan ventajas para datos anidados. Fang y Bailey (2001), realizaron una modificación al modelo de crecimiento de Richards y lo ajustaron como un modelo de efectos mixtos para modelar el crecimiento de la altura dominante en conexión con diferentes tratamientos silvícolas, todos los parámetros resultaron tener efectos mixtos y aleatorios en las parcelas individuales o

efectos en los tratamientos silviculturales; también muestran la metodología general de la construcción de modelos no lineales de efectos mixtos, que parámetros en el modelo deberían ser considerados puramente mixtos y cuales aleatorios, como determinar la apropiada estructura de la varianza y covarianza dentro de la parcela y como especificar la variación entre las parcelas, vía una apropiada modelación de las covariables, la pruebas de la razón de verosimilitud y el Criterio de Información akaike (AIC, por sus siglas en inglés) fueron usadas para la evaluación.

Hall y Bailey (2001), describieron métodos de estimación y predicción de modelo no lineales de variables de crecimiento forestal que están sujetas a fuentes de variabilidad anidadas, enfocándose al problema de estimar y hacer proyecciones de curvas de crecimiento de árboles basados en datos longitudinales agrupados por sitio y concluyen que los modelos de efectos mixtos tienen ventajas sustanciales sobre los métodos usados tradicionalmente. Cieszewski (2003), desarrolló un modelo dinámico de crecimiento en altura usando una forma simplificada de modelos de efectos mixtos en *Abies lasiocarpa* con datos de análisis troncales, las ecuaciones usadas fueron invariantes de ruta y de edad. Los parámetros del modelo fueron estimados con efectos fijos y aleatorios con correcciones de autocorrelación de primer y segundo orden. La corrección de autocorrelación de segundo orden fue necesaria para asegurar las propiedades del modelo y remover las correlaciones entre las secciones cruzadas, pero no las de primer orden. La estimación de los errores en los índices de sitio con efectos aleatorios eliminaron los efectos estocásticos de las variables predictivas; Hall y Clutter (2004), propusieron un modelo multivariado con diferentes niveles para predecir el rendimiento de madera y lo ajustaron como un modelo de efectos mixtos y demostraron la

metodología para usar simultáneamente sistemas de ecuaciones no lineales para ecuaciones de crecimiento y rendimiento forestal.

1.5 ESPECIE EN ESTUDIO

La vegetación arbórea del área de estudio está constituida por masas puras de pino y encino y bosques mezclados de pino-encino. Las especies de mayor valor comercial, tanto por las características tecnológicas de su madera como por su rango de distribución, son las del género pino, listadas en orden de importancia por su volumen de aprovechamiento: *P. cooperi* Blanco, *P. cooperi* var *ornelasi* y *P. durangensis* Martínez. Otras especies de menor valor comercial, distribución y abundancia son *P. teocote* Sch. et Cham, *P. ayacahuite* Ehrenb y *P. leiophylla* Sch. et Cham.

Pinus cooperi Blanco. Es un árbol de 20 a 30 metros de altura, con diámetro normal hasta de un metro; copa redondeada y densa, con ramas inclinadas hacia abajo unos 45°; corteza color café rojizo en la base y café negruzco en la parte superior, de 5 a 12 mm de espesor; acículas aglomeradas en los extremos de las ramillas en grupos de 5, rara vez de 4, de 5 a 9 cm de largo, de color verde claro amarillento, triangulares, fuertes, encorvadas y agudas; vainas persistentes, anilladas, de color café rojizo, las nuevas de 8 a 10 mm y las viejas de 5 a 7 mm de largo; conos ovoides alargados, ligeramente oblicuos, algo encorvados y casi simétricos, de 5 a 9 cm de largo, solitarios, rara vez por pares, de color moreno rojizo, brillantes, en pedúnculos semiocultos, de 4 a 6 mm, que acompañan al cono cuando cae; la madera es considerada de buena calidad en la industria del mueble, aunque también se usa para cajas de empaque, pilotes, durmientes y en la construcción (Eguiluz, 1985).

1.6 OBJETIVOS

Tomando en cuenta la importancia que presenta la especie en el área de estudio y la relevancia de los modelos en la predicción del crecimiento en altura y volumen de los árboles en el manejo forestal se plantearon los siguientes objetivos:

1.6.1 Objetivo general

Generar un sistema compatible de ahusamiento-volumen y ajustar modelos de diferencia algebraica y diferencia algebraica generalizada, incorporando variables del sitio, que nos permitan hacer estimaciones más precisas de la altura dominante promedio en rodales de *Pinus cooperi* Blanco, en la región de El Salto, Durango.

1.6.2 Objetivos específicos

- Generar un sistema compatible de ahusamiento-volumen y ajustarlo simultáneamente con efectos mixtos en árboles de *Pinus cooperi* Blanco, en Durango, México.
- Ajustar y evaluar modelos de crecimiento en altura dominante, incorporando variables del sitio y formulados como modelos de efectos mixtos para *Pinus cooperi* Blanco, en Durango, México.

1.7 LITERATURA CITADA

Borders, B. E. 1989. Systems of equations in forest stand modeling. *For. Sci.* 35(2): 548-556.

Cieszewski, C. J. 2001. Comparing fixed-and variable- base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48(1): 7-23.

Cieszewski, C. J., and R.L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46(1): 116-126.

Cieszewski, C. J. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y^3 = (ax^m)/(c+x^{m-1})$, a simplified mixed-model and scant Subalpine Fir data. *For. Sci.* 49(4): 2003.

Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable- pop merchantable volume equations. *For. Sci.* 26: 117-120.

Clutter, J. L., J. C. Forston, L.V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. Timber management a quantitative approach. USA. John Wiley & Sons Inc. 333 p.

Eguiluz, P. T. 1985. Descripción botánica de los pinos mexicanos. Universidad Autónoma de Chapingo. Chapingo, México. 45 p.

Fang, Z., R.L. Bailey, B. D. Shiver. 2001. A Multivariate simultaneous prediction system for stand growth and yield with fixed and random effects. *For. Sci.* 47(4): 550-562.

Fang, Z., and R.L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47(3): 287-300.

García, O. 1983. A stochastic differential equation model for the height growth of forest stand. *Biometrics* 39:1059-1072.

- García, O. 1970.- Índices de sitio para pino insigne en Chile. Instituto Forestal. Serie de investigación .Publicación N° 2, Santiago. Chile. 29 p.
- Gregoire, G.T., and O. Schabenberger. 1996. Nonlinear mixed-effects modeling of cumulative bole volume with spatially correlated within-tree data. *Journal of Agricultural , Biological, and Environmental Statistics*, 1: 107-119.
- Hall, D. B., and R.L. Bailey. 2001. Modeling and prediction of forest growth variables based on multilevel nonlinear mixed models. *For. Sci.* 47(3):311-321.
- Hall, D. B., and J. L. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60: 16-24.
- Husch, B., CH. I. Miller, C. and W. T. Beers, T. 1972. Forest mensuration. Second Edition. USA. Ronald Press Company. 410 p.
- Mendoza B., M. A. 1993. Conceptos básicos de manejo forestal. México. UTEHA. 161 p.
- Lynch, T. B., S. T. Chang, and J. P. Chandler. 1992. Estimation of individual tree volume by importance sampling and antithetic variates from the cylindrical shells integral. *Can. J. For. Res.* 22:326-335.
- Pinheiro, C.J, and D.M. Bates. 2000. Mixed-effects models in S and S-PLUS. Springer-Verlag, New York, Inc. 527 p.
- Rentería A., J. B. 1995. Estimación del volumen comercial de *Pinus cooperi* Blanco mediante modelos de ahusamiento en Durango. II Congreso Mexicano de Recursos Forestales, resumen de ponencias. Montecillo, México. 91 p.
- Romahn De La Vega., C. F., Ramírez, M., H y Treviño G., J. L. 1987. Dendrometria. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales. Pp. 133-235.

Torres R., J. M., O. S. Magaña T. y G. A. Valles G. 1993. Funciones de ahusamiento para 8 especies forestales del Estado de México. I Congreso Mexicano de Recursos Forestales, resumen de ponencias. Saltillo, Coahuila. 109 p.

Torres R., J. M. y O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Ed. LIMUSA, México. 472 p.

CAPÍTULO II

2. SISTEMA COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO-VOLUMEN PARA *Pinus cooperi* BLANCO EN DURANGO, MÉXICO

2.1 RESUMEN

Se presenta el desarrollo de un sistema compatible de volumen comercial y ahusamiento para estimar volumen sin corteza de *Pinus cooperi* Blanco. El sistema se basó en un modelo lineal polinómico previamente usado en la región y modificado en función de los datos para añadir flexibilidad. El modelo de volumen total obtenido a partir del sistema aproxima en su estructura al modelo de volumen total de Schumacher y Hall. Las ecuaciones se ajustaron como un sistema completamente simultáneo para compensar la variación entre ahusamiento y volumen comercial acumulado, que se da en cualquier punto del fuste. La estructura incluye efectos mixtos (EM) para controlar la variabilidad debida al árbol, corregir heterocedasticidad y lograr predicciones precisas en árboles de alto valor comercial. Los resultados indican que la información adicional que provee la estructura de EM mejora notablemente la capacidad predictiva en la parte baja del fuste. Adicionalmente, el ajuste simultáneo del sistema de ahusamiento-volumen mediante EM reduce los errores estándares de los parámetros estimados.

Palabras clave: efectos aleatorios, análisis troncales, sistema de ecuaciones.

2.2 ABSTRACT

The development of a compatible taper-top merchantable-volume system for estimating inside-bark volume of *Pinus cooperi* Blanco is presented. The system was based on a polynomial lineal model previously used at the study area, which was modified according to our data in order to improve its flexibility. The model obtained from the system is structurally similar to the Schumacher and Hall total volume model. The equations were fitted as a completely simultaneous system to offset the variation between taper-top and accumulated merchantable volume which occurs anywhere in the tree stem. The structure includes Mixed effects (ME) to control the variability due to the particular tree features, correct heterocedasticity, and reach precise predictions for high-value merchantable trees. Result indicate that the additional information provided by the ME structure largely improves the system's predictive capacity for the low tree stem. Furthermore, the simultaneous fitting of the taper-top- volume system by using ME reduces the standard errors of the parameters estimated.

Key words: random effects, stems analysis, systems of equations.

2.3 INTRODUCCIÓN

El volumen maderable de un árbol se estima usualmente a través de dos tipos de ecuaciones: de volumen o de ahusamiento. Siendo el ahusamiento el coeficiente de estrechamiento del diámetro a lo largo del fuste, es posible estimar directamente mediante una ecuación el diámetro a cualquier altura o la altura a cualquier diámetro (Clutter *et al.*, 1983; Torres *et al.*, 1993). Una vez definida la ecuación de ahusamiento es posible, mediante su integración matemática, obtener estimaciones del volumen total o parcial del fuste a cualquier límite de longitud o diámetro mínimo deseado (Lynch *et al.*, 1992). Alternativamente, si se desea evitar la integración se pueden ajustar modelos de volumen comercial y usarse directamente para la cubicación del arbolado en pie, donde existe una ecuación de ahusamiento implícita (Demaerschalk, 1973; Clutter, 1980). Cuando se tiene un par de ecuaciones de volumen y ahusamiento definidas por los mismos parámetros y una estructura geométrica común es posible definir un sistema compatible de ahusamiento-volumen.

El ajuste de un sistema compatible volumen-ahusamiento puede darse a través de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) o como un sistema de ecuaciones simultáneas. Al ajustar el sistema ahusamiento-volumen a través de métodos como ecuaciones aparentemente no relacionadas y máxima verosimilitud con información completa (SUR y FIML por sus siglas en inglés) se garantiza que los estimadores de los parámetros sean consistentes, ya que se ajustan simultáneamente el ahusamiento y el volumen acumulado, lo cual sin duda representa una ventaja. Contrariamente, bajo MCO el modelador debe decidir si se minimiza el error en la ecuación de ahusamiento o en la de volumen comercial, pero no en ambas (Borders, 1989; Fang *et al.*, 2000).

El ajuste como un sistema de ecuaciones simultáneas puede complementarse con la adición de efectos aleatorios bajo el enfoque de modelos de efectos mixtos (MEM). En los modelos de volumen-ahusamiento el análisis a través de MEM permite no sólo un uso más eficiente de los datos al controlar la variación aleatoria individual y desplazar los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación, también es posible utilizar estimaciones de los efectos aleatorios para tener predicciones más precisas (Fang y Bailey, 2001).

El objetivo de este trabajo fue generar un sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus cooperi*, especie que por su abundancia, buenas características tecnológicas y largos fustes limpios hacen que sea la que mayor volumen y valor aporta a la producción maderable en el estado de Durango. El ajuste se realizó como modelos de efectos mixtos.

2.4 MATERIALES Y MÉTODOS

2.4.1 Datos de volumen y ahusamiento

La investigación se efectuó en los predios La Vaca, El Embudo y El Hueco también conocido como predio Navíos, cubriendo una superficie forestal de 2,264 ha en el municipio de Durango, Durango, México. Las coordenadas geográficas de los predios se localizan entre 104° 59' 44" y 105° 05' 42" LO y 23° 55' 10" y 24° 01' 00" LN, con una altitud promedio de 2,500 m y una temperatura promedio anual de 15° C. La vegetación arbórea está constituida por diferentes especies de los generos *Pinus* y *Quercus*, entre las que destacan por su valor económico y volumen de aprovechamiento, *P. cooperi* Blanco, *P. leiophylla* Sch. et Cham, *P. teocote* Sch. et Cham y *P. engelmannii* Carr.

Se obtuvieron datos de 29 análisis troncales de *P. cooperi* Blanco siguiendo la técnica tradicional reportada por Manzanilla (1981); para ello se seleccionaron árboles sin daño físico

o mecánico de todas las categorías de diámetro y alturas presentes. Para los cálculos de cubicación se usó el método de trozas traslapadas que permite obtener volúmenes totales y parciales más precisos (Bailey, 1995). Los datos de ahusamiento y volumen acumulado se presentan gráficamente en la Figura 2-1.

Adicionalmente se contó con datos de 10 árboles de la misma especie colectados de un predio cercano al área en estudio, denominado Ejido “La Victoria”. Dichos datos se usaron para validar y probar las metodologías propuestas. Al igual que los datos para el ajuste, éstos provinieron de árboles derribados, tomándose información adicional de diámetros a la altura del tocón y a 2 m.

2.4.2 Desarrollo del modelo compatible ahusamiento-volumen

Para generar el sistema compatible de ahusamiento-volumen se tomó como base el modelo de ahusamiento Cielito 1 (Rentería, 1995), con el que se han obtenido buenos ajustes tanto en *Pinus cooperi* Blanco en Durango (Corral *et al.*, 1999) como en otras especies del Estado de Chihuahua (Pompa, 1997). Para Durango este modelo se ajustó a partir de la altura del tocón y del diámetro normal, dando mejores resultados en el segundo caso, sin embargo dos de sus parámetros no fueron estadísticamente significativos. En Chihuahua, Pompa (1997) ajustó el modelo únicamente a partir del diámetro normal. El modelo Cielito 1 es lineal y tiene la forma

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \quad (1)$$

Donde d = diámetro sin corteza (cm) a una altura dada (h), así $d = 0$ cuando $h = H$; D = diámetro normal (cm) a $h = 1.3$ m; $x = (H-h)/H$; h = altura del fuste al diámetro (d); H = altura total a la punta (m); β_i = parámetros del modelo.

Para calcular el volumen de una troza (V_{troza}) a cierta altura del fuste se integra el diámetro d a lo largo de una sección deseada como un sólido en revolución mediante una expresión de la forma

$$V_{troza} = k \int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial h \quad (2)$$

Donde $k = \frac{\pi}{40,000}$ es la constante volumétrica cuando d está en centímetros y la longitud de la troza en metros, y ∂h es el diferencial sobre la altura del fuste.

Despejando d^2 de la Ecuación (1) y sustituyendo en la Ecuación (2) se tiene

$$V_{troza} = kD^2 \int_{h_1}^{h_2} \left(\beta_1 \left(\frac{H-h}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{H-h}{H} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{H-h}{H} \right)^3 \right) \partial h \quad (3)$$

Así, el volumen de una troza (V_{troza}) definida entre dos alturas del fuste h_2 y h_1 es

$$V_{troza} = kD^2 \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1}^{h_2} \quad (4)$$

Siguiendo este desarrollo, el volumen total del fuste (V), es decir del tocón a la punta, se define como

$$\begin{aligned} V &= kD^2 \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1=0}^{h_2=H} \\ &= \frac{k}{12} D^2 H (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3) \end{aligned} \quad (5)$$

La Ecuación (5) se puede reducir a la forma $V = \alpha D^2 H$, expresión que representa el modelo de factor de forma constante.

Sin embargo, la ecuación de ahusamiento Cielito 1 (1), y en consecuencia su correspondiente ecuación compatible de volumen (5) presentan dos aspectos poco deseables: 1) La normalidad de la variable a ajustar. El modelo Cielito 1 utiliza como variable dependiente a $\left(\frac{d}{D}\right)^2$, variable no normal que restringe sus valores entre cero y uno, por lo que la estructura no lineal propuesta bajo MCO debe de ser más eficiente tanto en ajuste como para caracterizar sus parámetros sin tener que recurrir a un ajuste bajo modelos lineales generalizados. 2) Restricciones del ajuste. Aunque el modelo no restringe el ahusamiento a $d = D$, el ajuste se hace de forma tal que cuando $h = 1.3$ m entonces $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 1$ haciendo que $d^2 \cong D^2$, donde $\beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 \cong 1$. Sin embargo, restringir en dos puntos una ecuación de ahusamiento puede resultar en comportamientos ilógicos; por ejemplo, para predicciones donde $h > 1.3$ m es posible que $d^2 > D^2$.

Dado que la ecuación busca estimar diámetros decrecientes a partir de D , el cual es el único diámetro conocido, esta condición debe cambiarse por una que garantice que $d^2 < D^2$ para todo $h > 1.3$ m. Esto se logra con la incorporación del nuevo parámetro (δ) que asociado a la variable diámetro normal flexibiliza las condiciones de ajuste del modelo. Quedando como sigue:

$$\left(\frac{d^2}{D^\delta}\right) = \beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 \text{ de donde } d^2 = D^\delta [\beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3]$$

Así el nuevo modelo de ahusamiento propuesto (Cielito 1 Modificado) es

$$d = \sqrt{D^\delta \left(\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \right)} \quad (6)$$

Es posible verificar que tanto V_{troza} como V son extensiones directas del desarrollo previo, así tenemos que la ecuación compatible de volumen para Cielito 1 Modificado es

$$V_{troza} = kD^\delta \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1}^{h_2} \quad (7)$$

$$V = \frac{k}{12} D^\delta H (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3) \quad (8)$$

La Ecuación (8) es reducible a la forma $V = \alpha D^\delta H$, donde $\alpha = \frac{k}{12} (6\beta_1 + 4\beta_2 + 3\beta_3)$. Siendo (8) una aproximación a la estructura de Schumacher y Hall (1933) de la forma $V = \alpha D^\delta H^\gamma$ donde en este caso $\gamma = 1$.

De manera similar, la estructura de V_{troza} es modificable a una expresión de volumen comercial acumulado ($V_{comercial}$) definiendo los límites de integración de la siguiente forma

$$V_{comercial} = kD^\delta \left(\frac{\beta_1}{H} \left(Hh - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{\beta_2}{3H^2} (H-h)^3 - \frac{\beta_3}{4H^3} (H-h)^4 \right) \Bigg|_{h_1=h_t}^{h_2=h_c} \quad (9)$$

Donde h_c es la altura sobre el tocón a la que se da el $V_{comercial}$ y h_t es la altura del tocón. Así la forma desarrollada de esta expresión es

$$V_{comercial} = kD^\delta H^{-1} \left(\beta_1 \left(\left(Hh_c - \frac{h_c^2}{2} \right) - \left(Hh_t - \frac{h_t^2}{2} \right) \right) - \frac{\beta_2}{3H} \left((H-h_c)^3 - (H-h_t)^3 \right) - \frac{\beta_3}{4H^2} \left((H-h_c)^4 - (H-h_t)^4 \right) \right) \quad (10)$$

Con esta expresión se completa el sistema de ahusamiento-volumen comercial que al ajustar el ahusamiento implica el modelo de volumen comercial y viceversa.

Toda función de ahusamiento debe permitir el cálculo de la altura a la cual se da el diámetro mínimo comercial deseado, lo cual es particularmente útil para nuestra ecuación de $V_{comercial}$. Sin embargo, para el sistema propuesto la solución de h en la Ecuación (6) presenta el inconveniente de manejar raíces imaginarias que se pueden reducir hasta desaparecer durante la simplificación algebraica, una vez que se sustituyen los valores del ajuste. Dado el trabajo de gabinete que ello implica y el hecho de que no todos los paquetes convencionales pueden resolver una raíz imaginaria, se decidió que es más práctico el cálculo numérico de la solución de x_i iterando la expresión

$$x_i = \frac{\frac{d^2}{D^\delta}}{\beta_1 + \beta_2 x_{i-1} + \beta_3 x_{i-1}^2} \quad (11)$$

Que con una tolerancia definida (ξ), dada por $|x_i - x_{i-1}| \leq \xi$ permite calcular el valor de x para d y D dados. Es posible verificar que cualquier valor inicial positivo para x_{i-1} produce valores que convergen en un valor positivo menor de uno donde obviamente $h=H(1-x)$.

2.4.3 Estrategia de ajuste

Para facilitar la discusión sobre el ajuste del sistema compatible propuesto se abrevia la Ecuación (6) como $d_{ij} = f(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$ y la Ecuación 10 como $V_{ij} = g(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p})$ donde $f(\cdot)$ define la estructura del modelo de ahusamiento y $g(\cdot)$ al modelo de volumen comercial, \mathbf{p} es el vector de parámetros $\mathbf{p} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \delta)$ estimables del sistema y d_{ij} es el diámetro del i -ésimo árbol observado a la h_{ij} altura sobre el fuste. De igual manera para el volumen acumulado V_{ij} .

Es necesario considerar que el sistema de ecuaciones propuesto puede ajustarse de manera más eficiente si se permite la inclusión de efectos aleatorios. Así, es posible mejorar las características de los parámetros al compensar por el efecto de variables tomadas en una misma unidad experimental y simultáneamente ajustar los datos de ahusamiento-volumen. Esto es posible usando una estructura bivariada con efectos aleatorios. Tomando como base la formulación de Hall y Clutter (2004), el sistema compatible ahusamiento-volumen, se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{V}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) & 0 \\ 0 & \mathbf{g}(k, D_i, H_i, h_{ij}; \mathbf{p}) \end{pmatrix} + \mathbf{e}_i \quad (12)$$

Donde:

\mathbf{d}_i es el vector de observaciones de ahusamiento en el i-ésimo árbol,

\mathbf{V}_i es el vector de observaciones de volumen comercial en el i-ésimo árbol y,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_{2i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}_i$$

Quedando definidos los efectos aleatorios del modelo por

$$\mathbf{e}_i \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \text{ y } b_{2i} \sim N(0, \phi^2)$$

Así se tiene un solo parámetro con efectos mixtos de la forma $\beta_2 + b_{2i}$ y la estructura de \mathbf{e}_i hasta este punto se asume como homocedástica ($\sigma^2 \mathbf{I}$), pero puede flexibilizarse a nivel de componente (ahusamiento o volumen) para modelar tanto heterocedasticidad como autocorrelación por componente.

Para observar el efecto de las modificaciones realizadas al modelo original de ahusamiento Cielito 1, inicialmente se ajustaron las ecuaciones de ahusamiento (1) y (6) y las de volumen (4) y (10) por separado a través de MCO. Posteriormente se ajustó el sistema propuesto de manera simultánea y con efectos mixtos bajo el método de Máxima Verosimilitud Restringida (RMV).

La situación más práctica en la que un modelo de volumen con efectos mixtos ofrece ventajas sobre la regresión tradicional (MCO) se da cuando se requieren predicciones precisas para árboles de gran valor comercial. Sin tener que modificar la estructura del modelo para incluir observaciones adicionales, esto es posible ya que esta información puede usarse para estimar los efectos aleatorios específicos del individuo e incorporarlos directamente en nuestra predicción.

Para ejemplificar el uso del modelo de efectos mixtos cuando se dispone de información a priori de un árbol, la información básica para nuestro sistema ahusamiento-volumen sería el diámetro normal (D) y la altura total (H), si adicionalmente se conoce la altura del tocón (h_t) y el diámetro a esta altura (d_t), un diámetro adicional medido a una altura por encima de 1.3 m (d) y la altura a tal diámetro (h_d), se tiene información suficiente para estimar el valor b_{2i} específico de ese árbol y utilizarlo en las estimaciones. Simplificando la notación de Fang y Bailey (2001) para el caso particular del sistema de ahusamiento-volumen propuesto, es posible entonces estimar el efecto aleatorio específico con el vector de información adicional que es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_t, D, d)^T \\ (0, V_D, V_d)^T \end{pmatrix}$$

Donde:

d_0 es el vector de tres diámetros conocidos y V_0 es el vector de los volúmenes correspondientes a tales diámetros.

Así, el efecto específico por árbol puede estimarse como

$$\hat{b}_{2i} = \phi \hat{\mathbf{Z}}_k^T \left(\hat{\mathbf{Z}}_k \phi \hat{\mathbf{Z}}_k^T + \hat{\sigma}^2 \hat{\mathbf{R}}_k \right)^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k$$

Donde:

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}(D, H, \mathbf{h}_0; \boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{g}(k, D, H, \mathbf{h}_0; \boldsymbol{\beta}) \end{pmatrix} \text{ en este caso } \mathbf{h}_0 = (h_t, 1.3, h_d)^T \text{ y } k = \frac{\pi}{40000}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_k = \hat{\mathbf{F}}_k^T \mathbf{B}, \text{ donde } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \hat{\mathbf{F}}_k = \frac{\partial}{\partial \beta_2} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(D_i, H_i, \mathbf{h}_i; \boldsymbol{\beta}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{g}(k, D_i, H_i, \mathbf{h}_i; \boldsymbol{\beta}) \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que las derivadas parciales del sistema respecto a β_2 corresponden a

$$\frac{\delta}{\delta \beta_2} f(\cdot) = \frac{1}{2} \frac{D^\delta h_{ij}^2}{H_i^2 \sqrt{D_i^\delta \left(\frac{\beta_1 h_{ij}}{H_i} + \frac{\beta_2 h_{ij}^2}{H_i^2} + \frac{\beta_3 h_{ij}^3}{H_i^3} \right)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_2} g(\cdot) = -k D_i^\delta H_i^{-1} \left(\frac{(H_i - h_{ij})^3 - (H_i - h_t)^3}{3H_i} \right) \text{ y}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{I}_6$$

Estas ecuaciones han sido simplificadas para el caso específico. La notación completa puede verse en Vonesh y Chinchilli (1997).

2.5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estructura original contra estructura propuesta

Aunque los resultados de los ajustes de los modelos de ahusamiento no son comparables dadas las diferentes escalas de la variable dependiente, es posible comparar valores como la R^2 y el coeficiente de variación (CV). El modelo de ahusamiento modificado (6) logró tener mayor valor de R^2 y un CV menor (Tabla 2-1). El cambio en la estructura no sólo permite flexibilizar el ajuste por la adición de un parámetro sino que tiene consecuencias en la capacidad predictiva del mismo. Adicionalmente todos los parámetros son altamente significativos en contraste con el modelo original (1) donde β_2 fue significativo a un valor de rechazo de 0.057

Con la idea de hacer una comparación de los cuadrados medios de los errores (CME), se obtuvo un estimador del CME para el diámetro comercial (d) de la ecuación de ahusamiento (1), a partir de los resultados del ajuste de dicha ecuación, bajo la siguiente manipulación

algebraica: Si $\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$, entonces $\hat{d} = D\sqrt{\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3}$. De esta

manera el estimador del CME se da con la siguiente expresión $CME = \sum_{i=1}^n (\hat{d}_i - d_i)^2 / n - 3$,

resultando un $CME = 6.25$, que es superior al del modelo modificado (3.5337).

Por otra parte, si observamos los residuales de ambos modelos (Figura 2-2) podemos apreciar que en el modelo (1) existe un desajuste que tiende a sobreestimar sistemáticamente los diámetros en la punta y cercano a la base de los fustes, mientras que la estructura de los residuales del modelo (6) es mucho más deseable.

Tabla 2-1. Parámetros estimados, errores estándar y niveles de significancia muestral (α) para las ecuaciones de ahusamiento Cielito 1 (1) y Cielito 1 Modificada (6), ajustadas por MCO

Modelo	Parámetros estimados					CME	R ²	CV
	β_1	β_2	β_3	δ				
1	1.1488	-0.7679	1.0111	-	-	0.0145	0.9376	21.02
S_{β_1}	0.1350	0.4018	0.2838	-	-			
α	<0.0001	0.0571	0.0004					
6	0.6054	4.2572	-2.1065	1.7687		3.5337	0.9714	10.98
S_{β_1}	0.1651	0.8973	0.5468	0.0530				
α	0.0003	<0.0001	0.0001	<0.0001				

En cuanto a la ecuación compatible de volumen (10) también se puede observar que existen ganancias en la R², CME y niveles de significancia de los parámetros, comparados con la ecuación (4) de volumen original (Tabla 2-2). Por su parte los residuales de ambos modelos presentan tendencias muy similares y problemas de heterocedasticidad (Figura 2-3).

Tabla 2-2. Parámetros estimados, errores estándar (S_{β_1} y S_{δ}) y nivel de significancia muestral (α) para las ecuaciones compatibles de volumen del modelo Cielito 1 (4) y Cielito 1 Modificado (10), ajustadas por MCO.

Modelo	Parámetros estimados					CME	R ²
	β_1	β_2	β_3	δ			
10	0.9456	3.7390	-2.4804	1.7875	0.0006	0.989	
S_{β_1} y S_{δ}	0.4000	1.4018	1.0913	0.0225			
α	0.0088	0.0115	0.0239	<0.0001			
4	0.4472	1.8175	-1.2058		0.00089	0.9814	
S_{β_1}	0.1726	0.7016	0.6032				
α	0.0109	0.0101	0.0467				

Ajustes bajo MEM

Los parámetros estimados bajo RMV (Tabla 2-3) para ahusamiento (6) y $V_{comercial}$ (10) muestran que al considerar la correlación contemporánea se puede reducir de manera considerable el error estándar de los parámetros del modelo, además de unificar los valores por componente. En estos estadísticos se puede apreciar que los estimadores de los parámetros β_i de la ecuación de volumen y de ahusamiento obtenidos simultáneamente con RMV presentan desviaciones estándar menores que los obtenidos con MCO (Tabla 2-2 y 2-3), lo cual hace estos parámetros más eficientes.

Torres y Magaña (2001) mencionan que es común que la mayor parte de los modelos de volumen sufran problemas de heterocedasticidad dado que a mayores valores de diámetros y altura la variación en los volúmenes de los árboles se hace más grande, este problema se puede observar en los residuales de las ecuaciones de volumen (4) y (10), ajustadas por MCO (Figura 2-3), por lo que recomienda corregir esta deficiencia. Sin embargo, al observar los residuales del sistema de ahusamiento-volumen propuesto ajustados simultáneamente (Figura 2-4) se puede apreciar que no existe tendencia que muestren indicio de heterocedastidad en ambos modelos, por lo que se confirma que el ajuste con efectos mixtos ayuda a desplazar este problema (Fang y Bailey, 2001).

Tabla 2-3. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos de ahusamiento y volumen, ajustados simultáneamente con efectos mixtos a través de RMV. CIA es el Criterio de Información de Akaike y CIB es el Criterio de Información Bayesiano (Pinheiro y Bates, 2000).

Modelo	CIA	CIB	log MV restringida
12	1775.08	1800.5	-881.5377

Efectos fijos				
Modelo	Parámetro	Estimado	Error estándar	Prob. de Rechazo
12	β_1	0.444652	0.098394	<.0001
	β_2	3.164871	0.578721	<.0001
	β_3	-1.55822	0.330591	<.0001
	δ	1.858483	0.050044	<.0001

Efectos aleatorios

Modelo	Parámetro	Intervalo de Confianza al 95%		
		Estimado	Superior	Inferior
12	σ	1.29764	1.381601	1.218782
	ϕ	0.1020187	0.1776655	0.05858092

Estimación de efectos específicos con información adicional del inventario

Para validar la pertinencia de la estructura propuesta se utilizaron datos de 10 árboles del Ejido “La Victoria”, los cuales fueron cubicados bajo la misma metodología que los utilizados para el ajuste. A estos árboles se les midieron cuatro diámetros a alturas fáciles de medir en campo (altura del tocón, 0.6, 1.3 y 2.0 m); los diámetros normales de estos árboles oscilaban entre 24 y 40 cm con alturas totales entre 12 y 28 m. Se decidió hacer la comparación de las predicciones a cuatro alturas comerciales medidas en pies, a partir 12 (3.67 m), 20 (6.11 m), 30 (9.17 m) y altura total con y sin el uso de la estructura de efectos aleatorios. Se utilizó como una medida de comparación de la eficiencia de ambos ajustes el

sesgo, definido como $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (V_{ij} - \hat{V}_{ij})$, donde V_{ij} es el volumen acumulado observado del i -ésimo árbol a la j -ésima altura y \hat{V}_{ij} el volumen estimado con y sin efectos aleatorios del i -ésimo árbol a la j -ésima altura.

Los resultados muestran que cuando se considera la variabilidad específica del árbol los volúmenes predichos son más precisos que los obtenidos con el modelo de efectos fijos hasta la altura comercial de 30 pies (Tabla 2-4). A partir de este punto el modelo con efectos fijos es más adecuado ya que la información adicional proporcionada corresponde a las partes bajas del tronco. Considerando que las primeras trozas o trocería primaria tienen un valor comercial de hasta cinco veces más que la punta o producto secundario, y que las diferencias entre ambos volúmenes a esta altura es de hasta un 3% se recomienda medir al menos esta información adicional en árboles de fuste recto y buena conformación para obtener mejores valores estimados para los productos de alto valor, sobre todo cuando se realizan inventarios en predios cuya posibilidad estimada es de varios miles de metros cúbicos. Esto se reflejaría en una estimación más adecuada de los dividendos económicos potenciales en ejidos / comunidades o conjuntos prediales que además del aprovechamiento se encargan de procesar sus productos maderables. Por otra parte cuando se trata de estimar el volumen total, el modelo con sólo efectos fijos es más preciso que el que considera efectos mixtos.

Tabla 2-4. Comparación de la eficiencia del modelo de volumen, con y sin efectos aleatorios en una muestra de 10 árboles.

Altura comercial (pies)	Sesgo promedio con efectos mixtos y error en		Sesgo promedio con efectos fijos y error en		Diferencia porcentual promedio por altura
	porcentaje m ³	%	porcentaje m ³	%	
12	-0.4263	12.8	-0.5182	15.5	-2.7
20	-0.6041	11.4	-0.7411	14.0	-2.6
29	-0.5917	8.4	-0.7618	10.8	-2.4
Altura total	0.9969	8.6	0.7724	6.2	2.4

2.6 CONCLUSIONES

Las modificaciones realizadas al modelo de ahusamiento Cielito 1 permitieron mejorar el ajuste, tanto del ahusamiento como del volumen comercial teniéndose una estructura más flexible. El ajuste del sistema de cubicación compatible como un sistema con efectos mixtos no sólo es robusto, sino que permite utilizar información adicional para la cubicación en pie, que puede ser programada para lograr cálculos más precisos sobre todo para trocería de alto valor.

Adicionalmente, el ajuste bajo un MEM ayuda a hacer más correcto estadísticamente el supuesto de eficiencia de los parámetros estimados al desplazar la heterocedasticidad en el volumen comercial sin complicar demasiado su estructura.

Para una valoración más precisa de las ganancias netas del uso de los modelos de efectos mixtos en la estimación del volumen comercial, se necesitarían pruebas de distribución de productos con datos de inventario, así como el costo adicional por tomar información de dos diámetros más de cada árbol que presuma características de alto valor comercial.

2.7 LITERATURA CITADA

- Bailey, R. L. 1995. Upper-stem volumes from stem-analysis data: an overlapping bolt method. *Can. J. For. Res.* 25: 170-173.
- Borders, B. E. 1989. Systems of equations in forest stand modelling. *For. Sci.* 35(2): 548-556.
- Clutter, J. L. 1980. Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *For. Sci.* 26: 117-120.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L.V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. *Timber management a quantitative approach*. USA. John Wiley & Sons Inc. 333 p.
- Corral R., S., J. J. Návar CH. y F. Fernández S. 1999. Ajuste de funciones de ahusamiento a los perfiles fustales de cinco Pináceas de la región de El Salto, Durango. *Madera y Bosques* 5(2): 53-65.
- Demaerschalk, J. P. 1973. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. *Can. J. For. Res.* 3: 90-94.
- Fang, Z., and R.L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47(3): 287-300.
- Fang, Z., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46(1): 1-12.
- Hall, D. B., and J. L. Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60: 16-24.
- Manzanilla B., H. 1981. Los sitios permanentes de investigación silvícola un sistema integrado para iniciarse en el cultivo de los ecosistemas forestales, Secretaría de

- Agricultura y Recursos Hidráulicos, Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias, Boletín Técnico Núm. 116. 68 p.
- Lynch, T. B., S. T. Chang, and J. P. Chandler. 1992. Estimation of individual tree volume by importance sampling and antithetic variates from the cylindrical shells integral. *Can. J. For. Res.* 22: 326-335.
- Pinheiro, C. J. and D. M. Bates. 2000. *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. Springer-Verlag, New York, Inc. 527 p.
- Pompa G., Marín. 1997. Sistema de cubicación para el género *Pinus* en la UCODEFO # 7 Norogachi-Guachochi. Tesis de Maestría en Ciencias. Programa Forestal. Colegio de Postgraduados, Montecillo, México. 105 p.
- Rentería A., J. B. 1995. Estimación del volumen comercial de *Pinus cooperi* Blanco mediante modelos de ahusamiento en Durango. II Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Resumen de Ponencias. Montecillo, México. 91 p.
- Schumacher, F. X. and F. S. Hall. 1933. Logarithmic expression of the timber volume. *Journal of Agriculture Research* 47(9): 719-734.
- Torres R., J. M., O. S. Magaña T. y G. A. Valles G. 1993. Funciones de ahusamiento para 8 especies forestales del Estado de México. I Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Resumen de Ponencias. Saltillo, Coahuila. 109 p.
- Torres R., J. M. y O. S. Magaña T. 2001. Evaluación de plantaciones forestales. Ed. LIMUSA, México. 472 p.
- Vonesh, E. F., and V. M. Chinchilli. 1997. *Linear and nonlinear models for the analysis of repeated measurements*. Marcel Dekker, New York. 560 p.

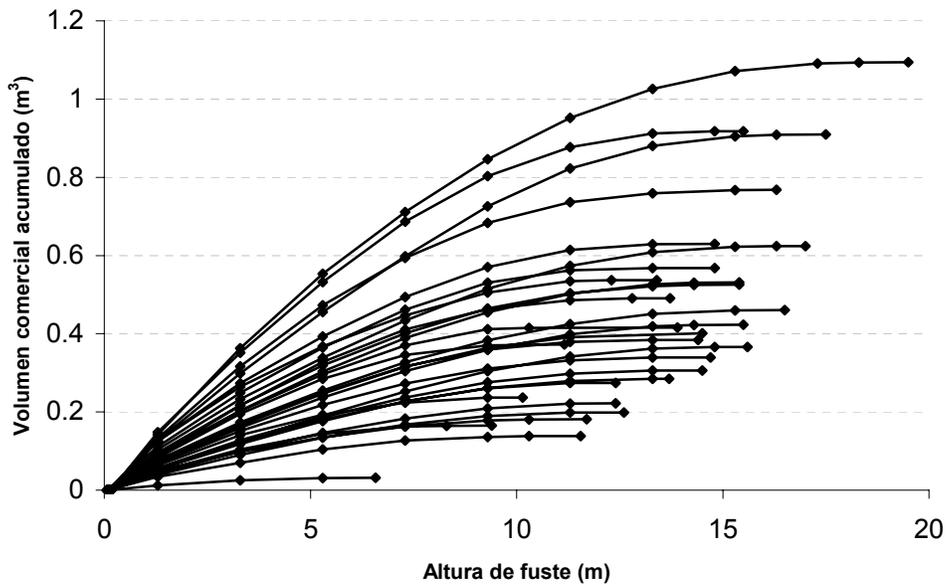
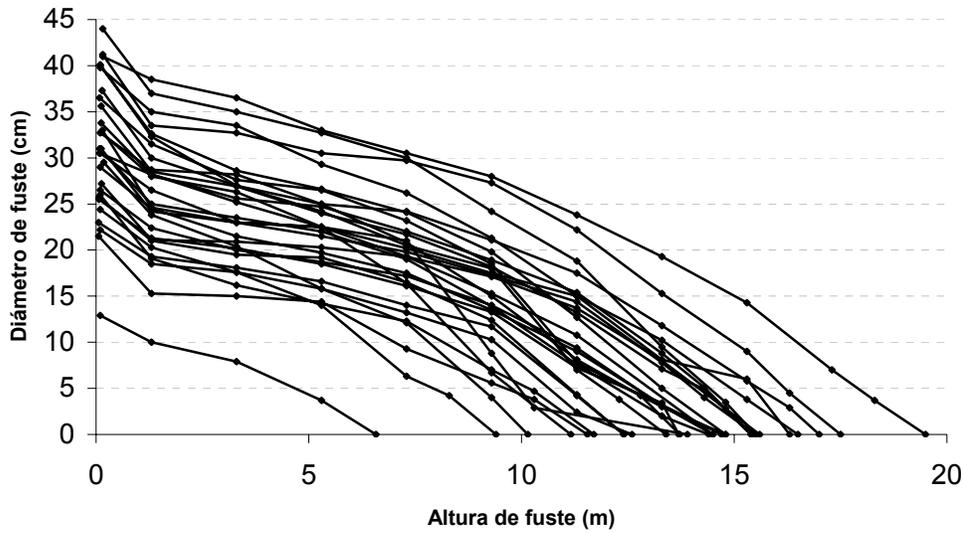


Figura 2-1. Diámetro sobre el fuste y volumen comercial vs. altura del fuste para los árboles muestreados

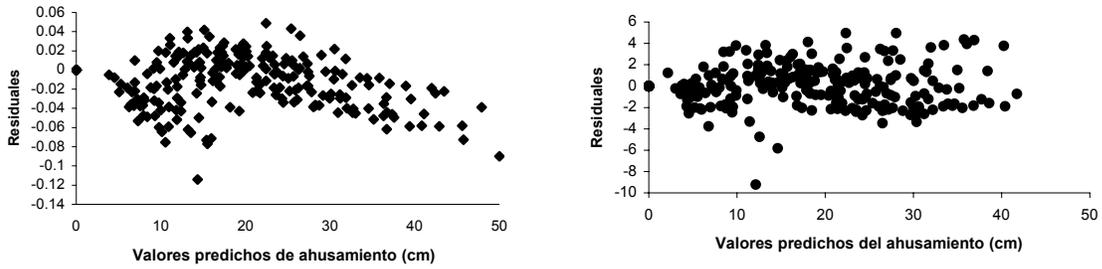


Figura 2-2. Dispersión de los residuales del modelo de ahusamiento Cielito 1 en su forma original (1) y modificada (6), ajustados por MCO

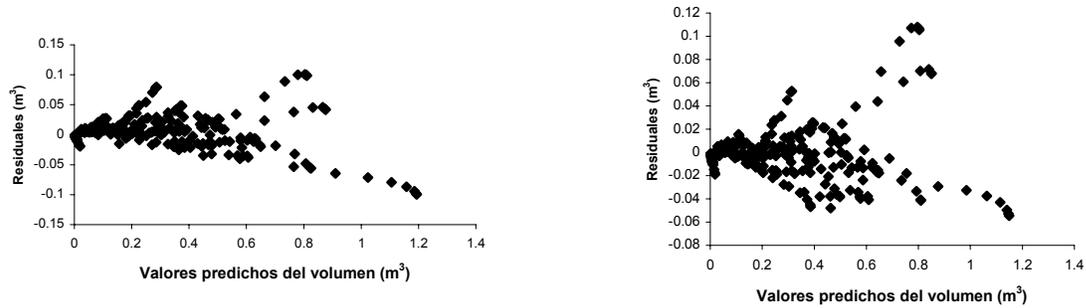


Figura 2-3. Dispersión de los residuales del modelo de volumen Cielito 1 en su forma original (4) y modificada (10), ajustados por MCO.

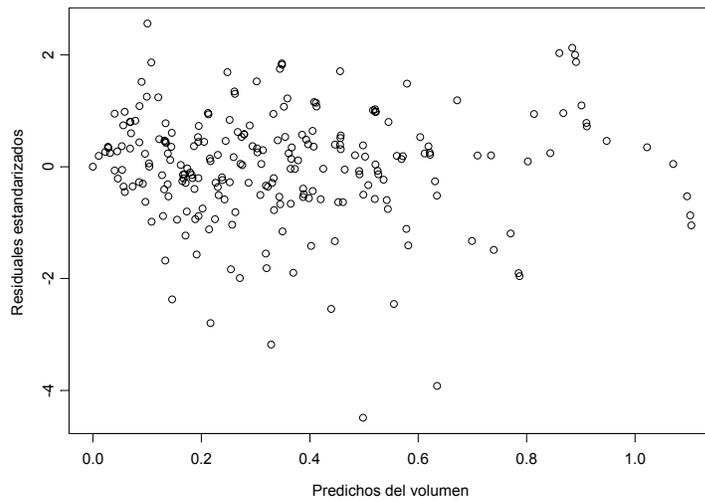
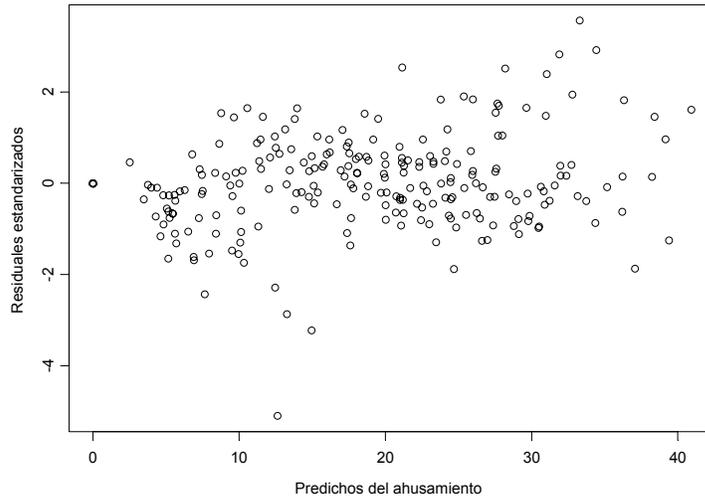


Figura 2-4. Dispersión de los residuales de la ecuación de ahusamiento (6) y volumen (10), ajustadas simultáneamente con efectos mixtos.

CAPÍTULO III

3. MODELO DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE PARA *Pinus cooperi* BLANCO EN DURANGO, MÉXICO

3.1 RESUMEN

Usando estructuras de Diferencia Algebraica (DA) y DA Generalizada (DAG) derivadas de los modelos de Chapman-Richards y Hossfeld IV se propone una estrategia de ajuste que facilita la selección del tipo de la familia de curvas de índice de sitio. La estrategia de ajuste es como sigue (1) Primeramente los datos de crecimiento en altura dominante agruparon en función de un factor ambiental relevante y fácilmente identificable, en este caso el tipo suelo. (2) Posteriormente las funciones propuestas de DA y DAG se ajustaron como estructuras de valor medio esperado bajo modelos no lineales de efectos mixtos en cada tipo de suelo (NLMEM). (3) Finalmente se combinaron las mejores estructuras por se tipo de suelo y se ajustaron al total del conjunto de los datos mediante NLMEM, compensando así las pérdidas en grados de libertad al ajustar cada modelo por separado. El enfoque usado mejora la calidad de ajuste total, además de permitir la descripción simultáneamente de patrones de crecimiento diversos.

Palabras clave: Índice de sitio, modelos de efectos mixtos, polimorfismo, anamorfismo.

3.2 ABSTRACT

A new fitting strategy is proposed with a two-fold objective: to help on the selection of the site index family curves and to simultaneously describe dominant-height growth patterns, thus maximizing data use. The base-structures used are derived from the Chapman-Richards and the Hossfeld IV models under the Algebraic Difference Approach (ADA) and Generalized ADA (GADA). The fitting strategy is summarized as (1) grouping dominant height data based on the most relevant and easy to identify environmental factor (soil type in this case). (2) Then the proposed ADA and GADA functions are fitted as mean value structures under non-linear mixed effect models (NLMEM) in each soil type. (3) Finally, the best fitted structures per soil type are combined into one and fitted simultaneously with NLMEM. In this way the overall model compensate for the losses in degrees of freedom lost during the separate fittings and provides a flexible structure that allows multiple patterns in a single fit.

Key words: Site index, mixed effect models, polymorphism, anamorphism.

3.3 INTRODUCCIÓN

La descripción adecuada del patrón de crecimiento en altura dominante es el primer paso en la construcción de un sistema de rendimiento maderable. Los módulos del sistema que corresponden a la predicción y proyección de sus componentes como área basal, supervivencia y volumen se relacionan de manera directa con el crecimiento en altura dominante (Hall y Bailey, 2001). En consecuencia el patrón de crecimiento seleccionado para la altura dominante, influye de manera definitiva en la proyección de estas variables y en la precisión de las estimaciones del sistema. Los modelos de crecimiento en altura dominante proveen adicionalmente al manejador forestal un sistema de clasificación de tierras a través del Índice de Sitio (IS). La selección de la familia de curvas que mejor describa el crecimiento en altura dominante es pues fundamental para garantizar el buen funcionamiento del sistema de rendimiento como un todo.

Las curvas de crecimiento en altura dominante representan un compendio de los factores del sitio que influyen sobre el desarrollo de un grupo de árboles y dependen de múltiples factores ambientales, muchos de ellos inobservables. A partir de estos razonamientos surge un desarrollo matemático *ad hoc* conocido como el método de diferencia algebraica (DA) (Cieszewski, 2001) como una estrategia de modelación que permite establecer un grupo específico de hipótesis sobre el crecimiento en altura, tomando como referencia general un modelo de crecimiento promedio y a partir de él “localizar” el crecimiento y por ende la calidad del rodal y su proyección partiendo de una condición inicial. El enfoque de la DA permite desarrollar familias de curvas de IS de tipo anamórfico (múltiples asíntotas o capacidad máxima observable debidas al sitio) o polimórficas (asíntotas convergentes con crecimiento específico debidas al sitio). Para una mayor flexibilidad y realismo, las curvas de

DA deberían poder integrar múltiples asíntotas y polimorfismo simultáneamente. Esto da lugar al desarrollo de la Diferencia Algebraica Generalizada (DAG) (Cieszewski y Bailey, 2000), enfoque con el cual se pueden obtener ecuaciones más flexibles que con DA, ya que permiten describir polimorfismo y múltiples asíntotas simultáneamente, sin perder las características de invarianza respecto a la edad base, e invarianza de ruta (*path invariance*), aspectos valiosos del método, es decir que las curvas no son afectadas por cualquier selección de edad base y que los valores de las predicciones deben ser iguales a la edad final deseada.

Aunque la literatura científica ofrece una amplia variedad de modelos de crecimiento adaptables a estructuras de DA y los menos con estructuras DAG, la decisión sobre la familia de curvas más adecuada depende en buena medida del modelador y su capacidad para identificar los patrones o grupo de patrones más adecuados para ello. El manejador forestal experimentado puede llegar a identificar un grupo compacto de factores ambientales fáciles de medir y observar en campo tales como tipo de suelo, pendiente, elevación y exposición por citar las más comunes e incorporar estos a los modelos de crecimiento para aumentar la precisión que puedan expresar estas variaciones de forma que sean útiles al manejador forestal (García, 1983).

En este trabajo proponemos una estrategia de selección de la familia de curvas dependiendo de un factor ambiental primario que determina su comportamiento, además de un procedimiento para combinar los datos en una estructura única, que permita ajustar los patrones deseables obtenidos y que optimiza el uso de los datos. Para ello nos auxiliamos de las condiciones de ajuste de los modelos y se discute el proceso que de manera intuitiva sigue el modelador en la agrupación de la variabilidad. Se compara esta estrategia con el enfoque

más ortodoxo de selección de los mejores ajustes para el total de los datos cuando la variabilidad no ha sido totalmente identificada.

3.4 MATERIALES Y MÉTODOS.

3.4.1 Área y especie de estudio

Este trabajo fue realizado con datos del ejido “La Victoria”, localizado en el sistema montañoso denominado Sierra Madre Occidental, de las subprovincias Gran Meseta, Cañones Duranguenses y Mesetas y Cañones del Sur, entre las coordenadas 23°40'04” y 23°47'54” de latitud Norte y los meridianos 105°21'31” y 105°29'52” de longitud Oeste, al suroeste del Estado de Durango en el Municipio de Pueblo Nuevo, entre los kilómetros 100 y 110 de la carretera Durango – Mazatlán, comprendiendo una superficie total de 10,761 hectáreas. Las alturas sobre el nivel del mar fluctúan entre 2400 y 2880 metros. La zona se encuentra dentro del grupo de climas templados C, subgrupo semifrío (E)(W₂) y tipos sub-húmedos con lluvias en verano, con un porcentaje de lluvia invernal entre 5 y 10 mm, con precipitación media anual de 800 a 1300 mm y una temperatura media anual de 18 a 22°C (García,1973). La geología del predio consiste en rocas ígneas extrusivas ácidas y basaltos del cretácico superior y cretácico inferior. Los tipos de suelos encontrados usando la clasificación de la FAO/UNESCO (1970) son Litosol, Cambisol, Regosol y Feozem. La vegetación arbórea está constituida por masas puras de pino y encino y bosques mezclados de pino-encino. Las especies de mayor valor comercial, tanto por las características tecnológicas de su madera como por su rango de distribución, son las del género pino, listadas en orden de importancia por su volumen de aprovechamiento: *P. cooperi* Blanco, *P. cooperi* var ornelasi y *P.*

durangensis Martínez. Otras especies de menor valor comercial, distribución y abundancia son *P. teocote* Sch. et Cham . *P. ayacahuite* Ehrenb y *P. leiophylla* Sch. et Cham.

Base de datos

La muestra consistió de 40 análisis troncales de árboles dominantes de la especie en estudio, las secciones o rodajas para el conteo de los anillos se hicieron de la siguiente manera: la primera a la altura del tocón, la segunda a la altura del pecho (1.30 m), las siguientes cada 2.50 m, hasta alcanzar un diámetro del fuste aproximado de 20 cm (medidas mínimas para trocería primaria de largas dimensiones) y las subsecuentes a cada metro, esto con el fin de aprovechar las trozas de mayor valor comercial. La edad de cada altura de la sección se estimó en el laboratorio y la obtención de las alturas verdaderas para edades dadas, se hizo con el método de Carmean (Dyer y Bailey, 1987); se trató de cubrir todas las condiciones de sitio presentes, además se colectó información como altura sobre el nivel del mar, pendiente, exposición, profundidad de suelo en el horizonte A y porcentaje de pedregosidad (proporción de piedras superficiales en un m²).

Con base en la profundidad del suelo y el porcentaje de pedregosidad presentes en el área fue posible distinguir 3 tipos de suelos: los suelos tipo 1 que son los mejores, son aquellos de profundidades mayores a 10 cm y un porcentaje de pedregosidad menor o igual al 5%, los suelos tipo 2 con profundidades entre el 6 y 10 cm y porcentajes de pedregosidad entre 6 y 10% y los suelos tipo 3 con profundidades menores o iguales a 5 cm y porcentajes de pedregosidad mayores al 10%. Cabe señalar que la altura sobre el nivel del mar, pendiente, exposición, profundidad de suelo, porcentaje de pedregosidad y otras características del sitio, son variables que son medidas en los inventarios previos a la elaboración de los programas de manejo y que a pesar de que se conoce la existencia de una relación directa con la

productividad del sitio, éstas no son utilizadas en forma cuantitativa para mejorar las estimaciones de la productividad de los bosques.

Los 40 árboles produjeron un total de 417 observaciones que agrupadas por individuo en series de crecimiento se pueden observar en la Figura 3-1. Para resaltar el posible efecto del tipo de suelo los datos como series de crecimiento se graficaron por tipo de suelo (Figura 3-2) para ubicar los datos en el contexto de la muestra. A simple vista se puede apreciar que cada tipo de suelo representa un patrón de crecimiento diferente cuando se visualiza como series de crecimiento. La estructura gráfica de los datos muestreados en el suelo 1 (Figura 3-2-a) sugiere que una familia polimórfica puede ser la opción más adecuada para este tipo de datos. No así para los datos del suelo tipo 3 (Figura 3-2-c) que describe una estructura más afín a las curvas de tipo anamórfico o con múltiples asíntotas. En los datos se aprecian tres grupos de calidad de estación cada uno con su propia asíntota, por lo que esperar que una familia polimórfica describa adecuadamente este patrón es poco probable. Los datos del suelo tipo 2 (Figura 3-2-b) parecen describir características intermedias, ya que a edades de menos de 60 años el patrón descrito es similar a un patrón polimórfico, sin embargo, después de los 60 pareciera que los árboles han alcanzando su capacidad máxima y empiezan a develar un patrón con múltiples asíntotas.

3.4.2 Funciones de crecimiento seleccionadas

Existe en la literatura una riqueza de modelos de crecimiento que pueden ser candidatos adecuados para nuestro estudio (Kiviste *et al.*, 2002) pero en este caso nos enfocamos a dos estructuras ampliamente conocidas de tres parámetros que han probado ser suficientemente flexibles y son ampliamente documentadas en la literatura. Una de ellas es el

la generalización del modelo de Von Bertalanffy, conocido como el modelo de Chapman-Richards (Zeide, 1993). El modelo además de ser flexible es una de la estructuras más conocidas en el mundo. La estructura general y su nomenclatura a usar en este artículo corresponde a

$$A = \beta_0 \left(1 - \exp(-\beta_1 E) \right)^{\beta_2} \quad (1)$$

Donde: E = edad en años; A = altura dominante en metros; \exp = base de los logaritmos naturales. β_i = coeficientes de regresión para el modelo Chapman-Richards.

La segunda estructura candidato corresponde a un modelo del tipo Hossfeld IV bajo la formulación de Cieszewski (2003). El modelo ha sido probado con éxito en las cercanías del área de estudio y ha mostrado buenos ajustes en esta especie (Corral, *et al.*, 2004).

$$A = \alpha_0 \left(1 + \alpha_1 \exp(-\alpha_2 \ln E) \right)^{-1} \quad (2)$$

Donde: $\ln(\cdot)$ es el logaritmo natural, α_i = coeficientes de regresión para el modelo Hossfeld IV, lo demás fue anteriormente definido

Del modelo básico de Chapman Richards (1) es posible generar tres ecuaciones de DA, una anamórfica y dos polimórficas, pero no se encontraron soluciones cerradas para modelos de DAG. Para el modelo Hossfeld IV (2) es posible obtener cinco ecuaciones, tres de DA y dos DAG (Cieszewski, 2003). En total se tienen ocho posibles opciones para los datos y cada forma es posible parametrizarla como un modelo de valor medio esperado bajo efectos mixtos (Tabla 3-1).

3.4.3 Formulación bajo Modelos de Efectos Mixtos

En este caso se escogió una estructura no lineal de Modelos de Efectos Mixtos (MEM) como la técnica de ajuste para nuestros modelos (Tabla 3-1). La ventaja de esta técnica es que permite controlar la variabilidad debida al individuo y describir mejor el patrón de crecimiento debido a la variabilidad global. Los efectos aleatorios también pueden desplazar los problemas de heterocedasticidad y autocorrelación, debido al control que se tiene sobre cada individuo, obteniéndose predicciones más precisas (Fang y Bailey, 2001). Los MEM pueden ajustarse bajo Máxima Verosimilitud o Máxima Verosimilitud Restringida (MVR), que son los métodos más adecuados para modelos en los que se tiene que compensar por pérdidas en los grados de libertad. En nuestro caso MVR probó ser más estable durante la etapa preliminar y es el método de ajuste seleccionado.

3.4.4 Estrategia de ajuste y construcción del modelo conjunto

Los datos para cada tipo de suelo se ajustaron al total de los ocho modelos potenciales como MEM. Se buscó “reconocer” a través de la bondad de ajuste la familia de curvas más adecuada por tipo de suelo. Para la selección de los modelos se tomaron en cuenta tres criterios de bondad de ajuste: El Criterio de Información Akaike ($AIC = -2(\text{Log-VR}) + 2k$, donde k es el número de parámetros del modelo), el Criterio de Información Bayesiano ($BIC = -2(\text{Log-VR}) + k \times \ln(n)$, donde n es el número total de observaciones) y el Logaritmo de la Verosimilitud Restringida (Log-VR). AIC y BIC son más adecuados cuando se comparan estructuras con efectos fijos diferentes, aunque para la comparación y selección entre modelos con igual número de parámetros Log-VR produce resultados idénticos a AIC y BIC (Pinheiro y Bates, 2000).

Una vez definidos las mejores ecuaciones por tipo suelo (y suponiendo que cada suelo fue definido por una función diferente) se procedió a construir el modelo conjunto. Sin embargo, ajustar una regresión por cada tipo de suelo restaría grados de libertad para calificar los parámetros estimados, por lo que después de la selección se unieron los modelos en un ajuste simultáneo de forma tal que se tenga una formulación del tipo

$$A_{ij} = \prod_m g_{[S]}^{(m)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \mathbf{p}^{(m,S)})^{I_{[S]}} + e_{ij} \quad (11)$$

Donde: A_{ij} es la altura a la j -ésima edad del i -ésimo árbol, $g_{[S]}^{(m)}(\cdot)$ es la estructura de valor medio esperado de la familia de curvas (m) para el suelo tipo S , $I_{[S=K]}$ es la variable indicadora 1 para $S=K$, 0 de otra forma, $\mathbf{p}^{(m)}$ es el vector de parámetros globales para la ecuación $g_{[S]}^{(m)}(\cdot)$. Las otras variables están definidas en el Tabla 3-1.

Una notación equivalente del modelo (11) pero que en ciertos casos fue más estable durante el ajuste de los modelos es de la forma

$$A_{ij} = \sum_m g_{[S]}^{(m)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \mathbf{p}^{(m,S)}) \times I_{[S]} + e_{ij} \quad (12)$$

Para añadir claridad y una notación mas breve a los modelos se toman las siguientes convenciones en la definición de $g_{[S]}^{(m)}(\cdot)$, de esta forma se tiene

$$A_{[S]ij} = f_{[S]}^{(m)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \mathbf{\beta}^{(m,S)}) \quad (13)$$

$$A_{[S]ij} = h_{[S]}^{(m)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(m,S)}) \quad (14)$$

Donde

$f_{[S]}^{(m)}(\cdot)$ es la estructura del valor medio esperado para la familia de curvas m para el suelo S tipo K obtenida a partir del modelo de Chapman-Richards, $h_{[S]}^{(m)}(\cdot)$ es la estructura del valor medio esperado para la familia de curvas m para el suelo S tipo K obtenida a partir del modelo de Hossfeld IV. Los vectores de los parámetros $\boldsymbol{\alpha}^{(m,S)}$ y $\mathbf{\beta}^{(m,S)}$ globales por tipo de modelo y suelo.

Supongamos que para el suelo tipo 1, el mejor ajuste de los 8 modelos potenciales fue dado para el modelo polimórfico de Chapman-Richards respecto a β_1 (modelo 4) ($m=4, S=1$), para el suelo 2 el mejor ajuste lo da el modelo 10 de DAG de Hossfeld IV ($m=10, S=2$). Para el suelo tres el mejor ajuste lo da una familia anamórfica de DA de Hossfeld IV (modelo 6) ($m=6, S=3$). Con estos modelos se puede construir un modelo conjunto de tipo:

$$A_{ij} = f_{[1]}^{(4)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\beta}^{(4,1)})^{I_{[S=1]}} \times h_{[2]}^{(10)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(10,2)})^{I_{[S=2]}} \times h_{[3]}^{(6)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(6,3)})^{I_{[S=3]}} + e_{ij}$$

$$a_i \sim N(0, \theta^2); \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

donde $\boldsymbol{\beta}^{(4,1)} = (\beta_{0,1}, \beta_{2,1})^T$, $\boldsymbol{\alpha}^{(10,2)} = (\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2})^T$ y $\boldsymbol{\alpha}^{(6,3)} = (\alpha_{1,3}, \alpha_{1,3})^T$

En este modelo se tiene al parámetro de efectos mixtos \hat{A}_0 como común en el ajuste por lo que solo se adiciona un parámetro aleatorio. A partir del modelo 11 es posible flexibilizar la definición de los efectos aleatorios de forma que por tipo de suelo la estructura conjunta queda como:

$$A_{ij} = \prod_m g_{[S]}^{(m)}(E_{ij}; \hat{A}_{0S} + a_{Si}, \mathbf{p}^{(m)})^{I_{[S]}} + e_{ij} \quad (15)$$

donde $\mathbf{a}_s = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{Si})^T$, $\mathbf{a}_s \sim N(0, \boldsymbol{\Theta})$ y $\boldsymbol{\Theta} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$

En este se asigna un efecto mixto asociado a la condición $\hat{A}_{0S} + a_{Si}$ por tipo de suelo. Esta estructura es equivalente al enfoque de los modelos multivariados descritos por Hall y Clutter (2004) y se propone como alternativa, especialmente, cuando el modelo conjunto este conformado por estructuras polimórficas, ya que durante el ajuste es posible que $\hat{A}_0 > \beta_{0,S}, \alpha_{0,S}$ destruyendo la convergencia del modelo. Para $\mathbf{a}_s = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{Si})^T$ se opto por una matriz de covarianza de tipo $\boldsymbol{\Theta} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ que minimizó el numero de parámetros

que se adicionan al modelo. Tomando como base el ejemplo previo de una estructura conjunta, bajo la formulación de (15), se tendría una estructura del tipo

$$A_{ij} = f_{[1]}^{(4)}\left(E_{ij}; \hat{A}_{0,1} + a_{1i}, \boldsymbol{\beta}^{(4,1)}\right)^{I_{[s-1]}} \times h_{[2]}^{(10)}\left(E_{ij}; \hat{A}_{0,2} + a_{2i}, \boldsymbol{\alpha}^{(10,2)}\right)^{I_{[s-2]}} \times h_{[3]}^{(6)}\left(E_{ij}; \hat{A}_{0,3} + a_{3i}, \boldsymbol{\alpha}^{(6,3)}\right)^{I_{[s-3]}} + e_{ij}$$

donde $\mathbf{a}_s = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})^T$, $\mathbf{a}_s \sim N(0, \boldsymbol{\Theta})$ y $\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{bmatrix}$

Modelos de referencia

Para contrastar objetivamente el procedimiento sugerido se buscó ajustar los datos empleados desde un enfoque más tradicional. Ello implica que a partir de los ocho modelos iniciales e ignorando el tipo de suelo, se selecciona el modelo que produce el mejor ajuste bajo MEM. Sin embargo, este enfoque tiene la desventaja potencial del número de parámetros totales utilizados en cada enfoque, por lo que no es plausible comparar un modelo con 6 parámetros (modelo 11) contra un modelo general con el mejor ajuste con sólo 2 parámetros. Los modelos combinados siempre se verían favorecidos en sus ajustes al no tener “equidad de condiciones comparativas”. Teniendo esto en cuenta, se pensó en un procedimiento “ortodoxo” el cual se selecciona en primer instancia y como base al mejor ajuste proveniente de la Tabla 3-1. Una vez hecha la selección se construye el modelo conjunto de la forma

$$A_{ij} = \prod_m g_{[S]}^{(m)}\left(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \mathbf{p}^{(m,S)}\right)^{I_{[S]}} + e_{ij} \text{ donde } m \text{ es constante para todo } S, \text{ es decir se usa la}$$

estructura del mejor ajuste global en cada tipo de suelo, lo que equivalente al modelo

$$A_{ij} = g_{[S]}^{(\cdot)}\left(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \mathbf{p}^{(\cdot,S)}\right) + e_{ij} \text{ donde el vector de efectos globales es de la forma}$$

$$\mathbf{p}^{(\cdot,S)} = (\mathbf{p}^{(\cdot,1)} I_1, \mathbf{p}^{(\cdot,2)} I_2, \mathbf{p}^{(\cdot,3)} I_3)^T \text{ y se tiene un total de seis parámetros de efectos fijos. Con estos}$$

enfoques se pretende ilustrar las bondades del procedimiento planteado. Por supuesto que es

posible también la formulación de tipo $A_{ij} = g_{[s]}^{(i)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,1} + a_{1i}, \mathbf{p}^{(i,S)}) + e_{ij}$ bajo la formulación (15) con efectos aleatorios por tipo de suelo.

3.5 RESULTADOS

Selección de modelos por tipo de suelo

Suelo tipo 1

El mejor ajuste para los datos edad-altura del suelo tipo 1 se obtuvo con el modelo (7) que es un polimórfico de Hossfeld IV modificado por α_1 . Con valores muy similares en sus parámetros de ajuste el modelo (4), polimórfico de Chapman-Richards respecto a β_1 también mostró buen ajuste (Tabla 3-2). Aunque se presentan en el cuadro valores redondeados de Log-VR los índices AIC y BIC colocan al modelo (7) como superior en ajuste. Este resultado coincide con la observación inicial y no es fortuito entonces que los mejores ajustes los proporcionan cuatro modelos de tipo polimórfico. El ajuste intermedio se da con el modelo (10). Evidentemente los modelos anamórficos o con múltiples asíntotas están en desventaja.

Suelo tipo 2

Para los datos del suelo tipo 2, el mejor ajuste se obtuvo con el modelo polimórfico de Hossfeld IV modificado en α_2 (8), seguido por el modelo (10) de tipo DAG de polimorfismo multiasintótico (Tabla 3-2). En este caso los cuatro modelos más favorecidos son de tipo polimorfico (incluyendo al 10), siendo claro que los modelos anamórficos o con múltiples asíntotas son los más pobres en el ajuste, estas aseveraciones también se hacen evidentes al observar la Figura 3-2-b.

Suelo tipo 3

En suelo tipo 3 el mejor ajuste se produjo con el modelo (10), con valores muy similares a los modelos anamórficos (6 y 3, Tabla 3-2). Estos resultados nos ayudan a confirmar las sospechas iniciales de que anamorfismo o polimorfismo con múltiples asíntotas, podrían representar de manera realista el patrón de crecimiento de los árboles dominantes de

esta especie en este tipo de suelo, que son considerados los de más baja productividad en el área de estudio.

Modelo conjunto

Los resultados obtenidos sugieren que un modelo de forma

$$A_{ij} = h_{[1]}^{(7)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(7,1)})^{I_{[s=1]}} \times h_{[2]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)})^{I_{[s=2]}} \times h_{[3]}^{(10)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(10,3)})^{I_{[s=3]}} + e_{ij}$$

$$a_i \sim N(0, \theta^2); \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (16)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}^{(7,1)} = (\alpha_{0,1}, \alpha_{2,1})^T$, $\boldsymbol{\alpha}^{(8,2)} = (\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2})^T$ y $\boldsymbol{\alpha}^{(10,3)} = (\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3})^T$

Es el más adecuado para describir los datos. Sin embargo, durante el proceso de ajuste no se logró convergencia dado que la condición $\hat{A}_0 + a_{1i}$ es demasiado general y para la estructura $h_{[2]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)})^{I_{[s=2]}}$ durante el proceso de ajuste es frecuente que $\hat{A}_0 > \alpha_{0,2}$ por lo que el algoritmo se detiene. Para lograr convergencia se optó por sustituir $h_{[2]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)})^{I_{[s=2]}}$ por $h_{[2]}^{(10)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(10,2)})^{I_{[s=2]}}$, que es la estructura que sigue en el rank de ajuste para este tipo de suelo. Así el modelo conjunto modificado queda como

$$A_{ij} = h_{[1]}^{(7)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(7,1)})^{I_{[s=1]}} \times h_{[2]}^{(10)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(10,2)})^{I_{[s=2]}} \times h_{[3]}^{(10)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(10,3)})^{I_{[s=3]}} + e_{ij} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(7,1)} = (\alpha_{0,1}, \alpha_{2,1})^T, \boldsymbol{\alpha}^{(10,2)} = (\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2})^T \text{ y } \boldsymbol{\alpha}^{(10,3)} = (\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3})^T$$

El ajuste de este modelo se presenta en el Tabla 3-3, en donde se puede apreciar la convergencia y alta significancia de los parámetros.

Para poder implementar la estructura (16) inicialmente sugerida, la formulación general (15) flexibiliza el ajuste por lo que replanteo el modelo (16) como

$$A_{ij} = \prod_m h_{[S]}^{(m)}(E_{ij}; \hat{A}_{0S} + a_{Si}, \boldsymbol{\alpha}^{(m,S)})^{I_{[s]}} + e_{ij} \text{ para } m = 7, 8, 10 \text{ que de otra forma es}$$

$$A_{ij} = h_{[1]}^{(7)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,1} + a_{1i}, \boldsymbol{\alpha}^{(7,1)})^{I_{[s=1]}} \times h_{[2]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,2} + a_{2i}, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)})^{I_{[s=2]}} \times h_{[3]}^{(10)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,3} + a_{3i}, \boldsymbol{\alpha}^{(10,3)})^{I_{[s=3]}} + e_{ij} \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ y } \mathbf{a}_s \sim N(0, \Theta)$$

Este modelo logró convergencia plena y se aprecian mejores resultados al comparar la bondad de ajuste de (17) y (18) (Tabla 3-3), lo cual parece razonable, ya que el modelo (17) mantiene la misma condición de altura inicial en los tres tipos de suelo, pero las altura asintótica de los árboles del suelo 1 presentan visiblemente una asíntota promedio mayor que la de los demás tipos de suelos (Figura 3-2) y esto es considerado en el ajuste del modelo (18), dándole mayor flexibilidad.

Ajuste de modelos de referencia

Usando el enfoque “tradicional” es posible ver que el ajuste global que ofrece las mejores condiciones a partir de los ocho modelos iniciales y sin tomar en cuenta el tipo de suelo, es el modelo polimórfico 2 de Hossfeld IV (Tabla 3-4). Así la estructura sugerida bajo condición inicial común es de la forma

$$A_{ij} = h_{[1]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(8,1)})^{I_{[s=1]}} \times h_{[2]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)})^{I_{[s=2]}} \times h_{[3]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_0 + a_i, \boldsymbol{\alpha}^{(8,3)})^{I_{[s=3]}} + e_{ij} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(8,1)} = (\alpha_{0,1}, \alpha_{1,1})^T, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)} = (\alpha_{0,2}, \alpha_{1,2})^T \text{ y } \boldsymbol{\alpha}^{(8,3)} = (\alpha_{0,3}, \alpha_{1,3})^T$$

Para complementar este enfoque se propone una estructura con condiciones iniciales diferentes por tipo de suelo de la forma

$$A_{ij} = h_{[1]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,1} + a_{1i}, \boldsymbol{\alpha}^{(8,1)})^{I_{[s=1]}} \times h_{[2]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,2} + a_{2i}, \boldsymbol{\alpha}^{(8,2)})^{I_{[s=2]}} \times h_{[3]}^{(8)}(E_{ij}; \hat{A}_{0,3} + a_{3i}, \boldsymbol{\alpha}^{(8,3)})^{I_{[s=3]}} + e_{ij} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(8,S)} = (\alpha_{0,S}, \alpha_{1,S})^T$$

El ajuste de los modelos (19 y 20) y sus parámetros se muestran en el Tabla 3-5, en donde se puede apreciar que existe una ligera mejoría en el modelo (20), también debida a que contempla condiciones iniciales diferentes en cada tipo de suelo.

3.6 DISCUSIÓN

Uno de los principales intereses de este estudio es demostrar que es posible mejorar las predicciones del crecimiento en altura dominante incorporando variables del sitio fáciles de medir en campo y que comúnmente están disponibles en todas las unidades responsables del manejo forestal en México. Aunque en este trabajo se consideró sólo el tipo de suelo, la agrupación por este factor nos permitió identificar de una manera más evidente los patrones de crecimiento de esta especie (Figura 3-2).

Los modelos de referencia o enfoque tradicional (8, 19 y 20), en donde se considera un sólo patrón de crecimiento, presentan resultados más pobres que los modelos conjuntos (17 y 18) que toman en cuenta los diferentes patrones de crecimiento, atribuidos al tipo de suelo (Tabla 3-6). Esto es más evidente al observar las proyecciones de las alturas del modelo conjunto (18) en los datos de los suelos 1, 2 y 3 (Figuras 3-4-a, b y c), en donde se aprecia una buena representación en los tres tipos de suelos, en contraste con las proyecciones de las alturas del modelo que considera solamente un patrón de crecimiento (20) en los datos del suelo tipo 3 (Figura 3-4-c), en la que las asíntotas y en general las tendencias de las alturas de las curvas no parecen ser las sugeridas por los datos.

Todas las ecuaciones de crecimiento en altura utilizadas son dinámicas e invariantes de la edad base, ya que pueden usar directamente alturas a cualquier edad para predecir alturas consistentes y además muestran compatibilidad entre índices de sitio y modelos de crecimiento en altura en la misma ecuación. El ajuste de estas ecuaciones como modelos de efectos mixtos desplaza los problemas de heterocedasticidad y no hace necesario la corrección por autocorrelación de primer orden ya que ésta no mejora la forma de las curvas, sólo es útil

en la interpretación apropiada de las propiedades estadísticas del modelo (Cieszewski, 2003), por lo que no se consideró necesario analizar estos dos supuestos del modelo.

Aunque el procedimiento busca eliminar parte de la subjetividad en la selección de los modelos esto en parte requiere de una adecuada supervisión del silvicultor en la definición de los factores ambientales.

La estructura es suficientemente flexible para acomodar estructuras simultáneamente en un solo ajuste y entonces se optimizan el uso de los datos.

Aunque el ajuste de manera ortodoxa representa una forma de seleccionar las curvas, la parte de observación y calificación de tipos de curvas por tipo de suelo prueba ser superior por lo que para el ajuste se debe empezar por una adecuada selección de un modelo donde se puede remover parcialmente los factores subjetivos y remplazarlos por la bondad de ajuste.

3.7 CONCLUSIONES

Las ecuaciones de DA y DAG derivadas del modelo de Hossfeld IV, ajustadas como modelos de valor medio esperado con efectos mixtos se ajustaron mejor que las de Chapman-Richards en la base de datos sin agrupar y agrupadas por tipo de suelo.

La agrupación de los datos de edad-altura por tipo de suelo permitió identificar los patrones de crecimiento de la altura dominante y a partir de ello, ajustar modelos de DA y DAG, como modelos de valor medio esperado con efectos mixtos. Las mejores ecuaciones por tipo de suelo, ajustadas simultáneamente en un mismo modelo con condiciones iniciales diferentes (Ecuación 18), presentó mejores resultados que los ajustes hechos de manera tradicional en los que no se consideraran los patrones de

crecimiento atribuidos a los tipos de suelos, por lo que se recomienda considerar e incorporar la variable suelo para aumentar la capacidad predictiva de los modelos.

3.8 BIBLIOGRAFÍA

- Cieszewski, C. J. 2001. Comparing fixed-and variable- base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.* 48(1): 7-23.
- Cieszewski, C. J. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $y^3=(ax^m)/(c+x^{m-1})$, a simplified mixed-model and scant Subalpine Fir data. *For. Sci.* 49(4) 2003.
- Cieszewski, C. J., and R.L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46(1): 116-126.
- Corral, R. J. J., J. G. A. González, A. D. R. González and K. V. Gadow. 2004. compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango, México. *For. Ecol. Manage.* 201: 145-160.
- Dyer, M. and R. L. Bailey. 1987. A test of six methods for estimating true heights from stem analysis data. *For. Sci.* 33:3-13.
- Fang, Z., and R.L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47(3).
- FAO/UNESCO. 1970. Clave de unidades de suelos para el mapa de suelos del mundo. Secretaria de Recursos Hidráulicos. Dirección General de Estudios. Dirección de Agroecología. México , D. F.
- García , M. E. 1973. Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen; para adaptarlo a las condiciones de la Republica Mexicana. Instituto de Geografía. UNAM. México, D.F. 243 p.
- Garcia, O. 1983. A stochastic differential equation model for the height growth of forest stand. *Biometrics* 39:1059-1072.
- Hall, D. B., and R.L. Bailey. 2001. Modeling and prediction of forest growth variables based on multilevel nonlinear mixed models. *For. Sci.* 47(3):311-321.

- Hall, D. B., and Clutter. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60: 16-24.
- Kiviste, A., J. Álvarez, A. R. Alboreca, A. D. R. González. 2002. Funciones de crecimiento en el ámbito forestal. *Comunicaciones I. N. I. A. Serie: Recursos Naturales*. No. 4.
- Pinheiro, C.J, and D.M. Bates. 2000. *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. Springer-Verlag, New York, Inc. 527 p.
- Zeide, B. 1993. Analysis of growth equations. *For. Sci.* 39 (3):594-616.

Tabla 3-1. Modelos de DA y DAG parametrizados como modelos de valor medio esperado con efectos mixtos.

Modelo	Estructura con efectos mixtos
Chapman Richards anamórfico	$A_{ij} = (\hat{A}_0 + a_i) \times \left(\frac{1 - \exp(-\beta_1 E_{ij})}{1 - \exp(-\beta_1 E_0)} \right)^{\beta_2} + \varepsilon_{ij} \quad (3)$
Chapman Richards polimórfico 1	$A_{ij} = \beta_0 \left[\left(1 - \left(1 - (\hat{A}_0 + a_i) / \beta_0 \right)^{\left(\frac{1}{\beta_2} \right)^{\frac{E_{ij}}{E_0}}} \right)^{\beta_2} \right] + \varepsilon_{ij} \quad (4)$
Chapman Richards polimórfico 2	$A_{ij} = \beta_0 \left((\hat{A}_0 + a_i) / \beta_0 \right)^{\left(\ln(1 - \exp(-\beta_1 E_{ij})) / \ln(1 - \exp(-\beta_1 E_0)) \right)} + \varepsilon_{ij} \quad (5)$
Hossfeld IV Anamórfico	$A_{ij} = (\hat{A}_0 + a_i) \times \left[\frac{1 - \exp(\alpha_1 + \alpha_2 \ln(E_0))}{1 - \exp(\alpha_1 + \alpha_2 \ln(E_{ij}))} \right] + \varepsilon_{ij} \quad (6)$
Hossfeld IV polimórfico 1	$A_{ij} = \alpha_0 / \left[1 + \left(\left(\frac{\alpha_0}{\hat{A}_0 - a_i} - 1 \right) \left(\frac{E_0}{E_{ij}} \right)^{\alpha_2} \right) \right] + \varepsilon_{ij} \quad (7)$
Hossfeld IV polimórfico 2	$A_{ij} = \alpha_0 / \left[1 + \alpha_1 \left(\frac{\alpha_0 - (A_0 + a_i)}{\alpha_1 (A_0 + a_i)} \right)^{\frac{\ln(E_{ij})}{\ln(E_0)}} \right] + \varepsilon_{ij} \quad (8)$
Hossfeld IV DAG 1	$A_{ij} = \left(\frac{1}{\left((\hat{A}_0 - a_i) - \alpha_1 (\exp[-\alpha_2 \ln(E_0)] - \exp[-\alpha_2 \ln(E)]) \right)} \right)^{-1} + \varepsilon_{ij} \quad (9)$
Hossfeld IV DAG 2	$A_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\left((\hat{A}_0 + a_i) + \mathfrak{R} \right)^2}{\left(\hat{A}_0 + a_i \right) + \mathfrak{R} + 2\alpha_1 (\exp[-\alpha_2 \ln(E_{ij})])} + \varepsilon_{ij} \quad (10)$
	Donde $\mathfrak{R} = \sqrt{\left(\hat{A}_0 + a_i \right)^2 + 4 \left(\hat{A}_0 + a_i \right) \alpha_1 (\exp[\alpha_2 \ln(E_0)])}$

Efectos aleatorios $a_i \sim N(0, \theta^2)$; $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

Donde: A_{ij} es la altura dominante del i -ésimo árbol a la j -ésima edad; E_{ij} es la j -edad de i -árbol; \hat{A}_0 es el parámetro de valor medio esperado que incluye los efectos mixtos (también conocidos como parámetros específicos); β_i son parámetros globales de las formas dinámicas de Chapman-Richards; α_i son parámetros globales de las formas dinámicas Hossfeld IV, a_i son los parámetros específicos de i -árbol.

Tabla 3-2. Ajuste de los MEM a los datos edad-altura por tipo de suelo y su posición en función del ajuste.

Suelo	Modelo	Familia	Tipo	Grados de libertad	AIC	BIC	Log-VR	Rank
1	7	H	P-1	5	610	625	-300	1
	4	CHR	P-1	5	611	627	-300	2
	5	CHR	P-2	5	628	644	-309	3
	8	H	P-2	5	629	644	-309	4
	10	H	DAG-2	5	634	649	-312	5
	6	H	A	5	676	692	-333	6
	3	CHR	A	5	686	702	-338	7
	9	H	DAG-1	5	766	782	-378	8
2	8	H	P-2	5	244	256	-117	1
	10	H	DAG-2	5	253	264	-121	2
	4	CHR	P-1	5	263	274	-126	3
	7	H	P-1	5	262	274	-126	3
	6	H	A	5	286	298	-138	5
	9	H	DAG-1	5	308	319	-149	6
	5	CHR	P-2	5	315	327	-152	7
	3	CHR	A	4	327	336	-159	8
3	10	H	DAG-2	5	521	537	-255	1
	6	H	A	5	533	549	-261	2
	3	CHR	A	5	538	553	-264	3
	8	H	P-2	5	555	570	-272	4
	9	H	DAG-1	5	587	603	-288	5
	7	H	P-1	5	618	634	-304	6
	4	CHR	P-1	4	624	637	-308	7
	5	CHR	P-2	4	732	744	-362	8

Tabla 3-3. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos 17 y 18 bajo el enfoque del modelo conjunto.

Modelo	GL	AIC	BIC	logLik
17	9	1400.43	1436.576	-691.2152
18	13	1384.246	1436.392	-679.123

Efectos Fijos

Modelo	Parámetro	Estimado	Error estándar	T calculada	Pr>t
17	A_0	21.06	0.681	30.92321	<.0001
	$\alpha_{0,1}$	43.00	2.424	17.73768	<.0001
	$\alpha_{2,1}$	1.40	0.053	26.62497	<.0001
	$\alpha_{1,2}$	22825.20	6270.998	3.63980	0.0003
	$\alpha_{2,2}$	1.85	0.112	16.52247	<.0001
	$\alpha_{1,3}$	7549.87	1338.578	5.64022	<.0001
	$\alpha_{2,3}$	1.74	0.080	21.73725	<.0001
18	$A_{0,1}$	23.166	1.110	20.86779	<.0001
	$A_{0,2}$	21.601	1.216	17.76270	<.0001
	$A_{0,3}$	18.905	0.844	22.40264	<.0001
	$\alpha_{0,1}$	43.347	2.433	17.81861	<.0001
	$\alpha_{2,1}$	1.400	0.052	27.07742	<.0001
	$\alpha_{0,2}$	26.938	1.020	26.41866	<.0001
	$\alpha_{1,2}$	1318.953	436.540	3.02138	0.0027
	$\alpha_{1,3}$	7824.230	1408.626	5.55451	<.0001
	$\alpha_{2,3}$	1.764	0.080	21.99081	<.0001

Efectos aleatorios

Modelo	Parámetro	Inferior 95%	Estimado	Superior 95%
17	θ	3.354463	4.211722	5.28806
	σ	0.991956	1.06604	1.145657
18	θ_1	2.909118	4.244309	6.192309
	θ_2	1.740095	3.127168	5.619912
	θ_3	2.426625	3.422743	4.827763
	σ	0.9765135	1.048808	1.126454

Tabla 3-4. Ajuste de los MEM a la base de datos edad-altura sin considerar los tipos de suelos.

Modelo	GL	AIC	BIC	Log-VR
8	5	1583	1603	-786
7	5	1597	1617	-793
10	5	1604	1624	-797
4	5	1604	1625	-797
6	5	1655	1675	-822
3	5	1671	1691	-830
5	5	1719	1739	-854
9	5	1781	1801	-885

Tabla 3-5. Bondad de ajuste y parámetros estimados para los modelos de referencia 19 y 20.

Modelo	GL	AIC	BIC	logLik
19	9	1444.843	1480.988	-713.4213
20	13	1439.353	1491.5	-706.6767

Efectos Fijos

Modelo	Parámetro	Estimado	Error estándar	T calculada	Pr>t
19	A_0	21.306	0.6011	35.44502	<.0001
	$\alpha_{0,1}$	39.752	2.0116	19.76138	<.0001
	$\alpha_{1,1}$	375.971	52.8504	7.113872	<.0001
	$\alpha_{0,2}$	26.937	1.1077	24.31796	<.0001
	$\alpha_{1,2}$	1313.600	476.3455	2.757662	0.0061
	$\alpha_{0,3}$	27.296	1.0599	25.75337	<.0001
	$\alpha_{1,3}$	202.337	31.4616	6.431237	<.0001
20	$A_{0,1}$	22.951	1.1554	19.86420	<.0001
	$A_{0,2}$	21.586	1.2154	17.75950	<.0001
	$A_{0,3}$	19.739	0.6688	29.51538	<.0001
	$\alpha_{0,1}$	40.388	2.1053	19.18412	<.0001
	$\alpha_{1,1}$	373.973	51.9242	7.20228	<.0001
	$\alpha_{0,2}$	26.846	1.1044	24.30905	<.0001
	$\alpha_{1,2}$	1349.613	492.5373	2.74012	0.0064
	$\alpha_{0,3}$	26.490	0.9749	27.17207	<.0001
	$\alpha_{1,3}$	214.385	34.4256	6.22748	<.0001

Efectos aleatorios

Modelo	Parámetro	Inferior 95%	Estimado	Superior 95%
19	θ	2.933841	3.69573	4.655473
	σ	1.07052	1.150587	1.236643
20	θ_1	3.017314	4.408629	6.441495
	θ_2	1.841882	2.656771	3.832185
	θ_3	1.720200	3.106914	5.611506
	σ	1.071276	1.151486	1.237701

Tabla 3-6. Ajuste total de los modelos conjunto y del modelo de referencia.

Modelo	GL	AIC	BIC	logLik	CC
17	9	1400.43	1436.58	-691.22	3528.221
18	13	1384.25	1436.39	-679.12	3499.761
8	5	1583	1603	-786	3972
19	9	1444.84	1480.99	-713.42	3639.252
20	13	1439.35	1491.5	-706.68	3637.53

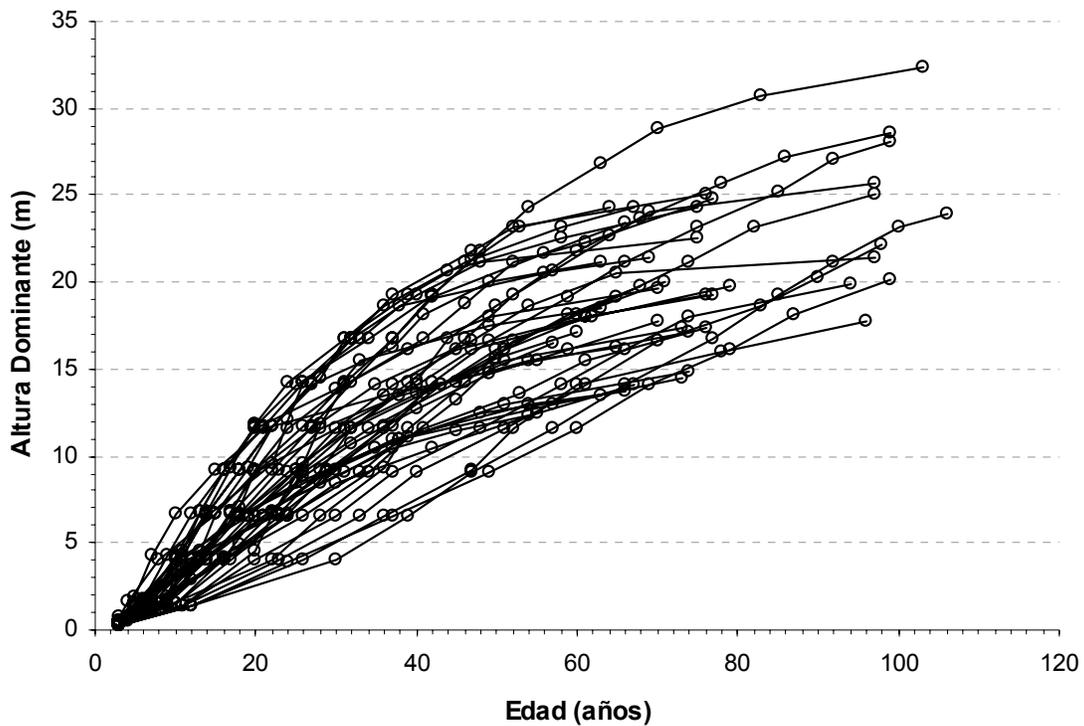


Figura 3-1. Datos de los análisis tróncales como series de crecimiento.

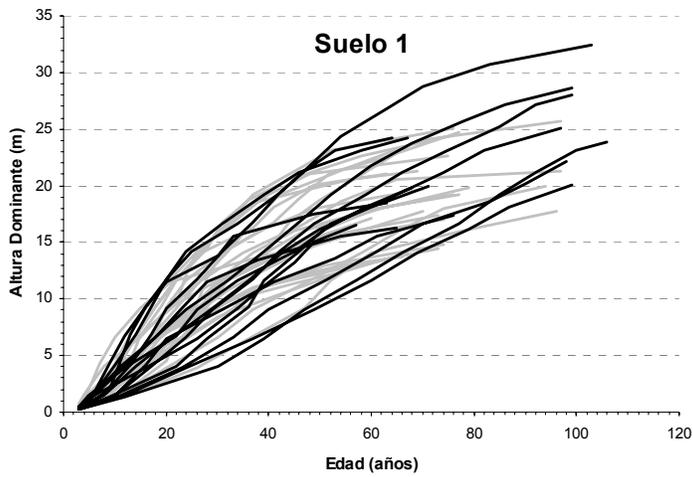


Figura 3-2-a

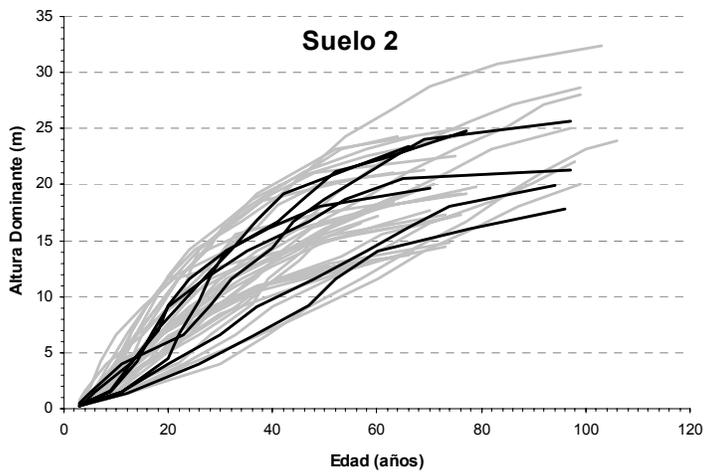


Figura 3-2-b

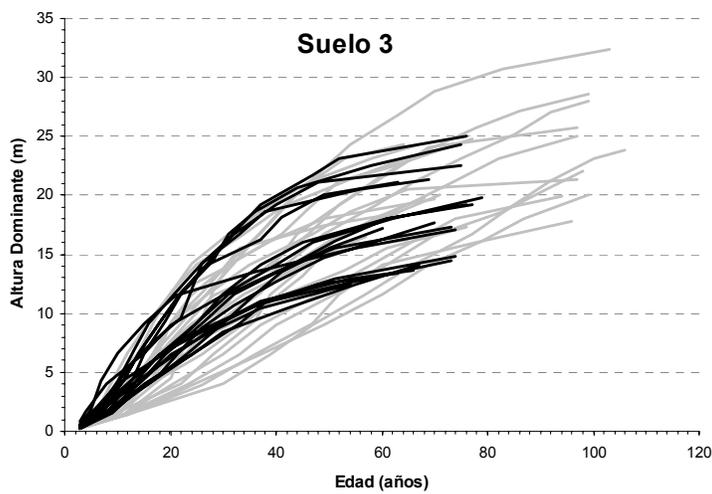


Figura 3-2-c

Figura 3-2. Datos agrupados por tipo de suelo y contrastados con los datos en general.

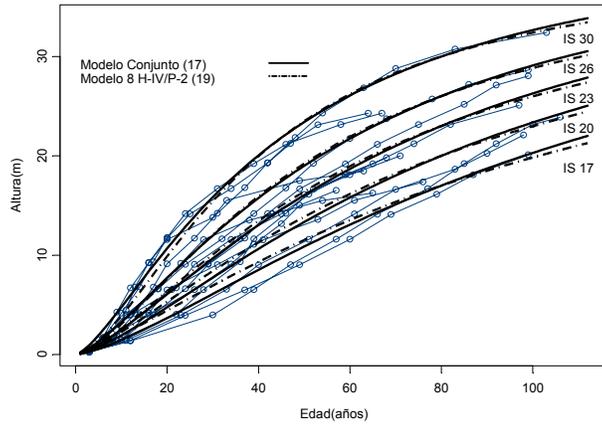


Figura 3-3-a
Suelo 1

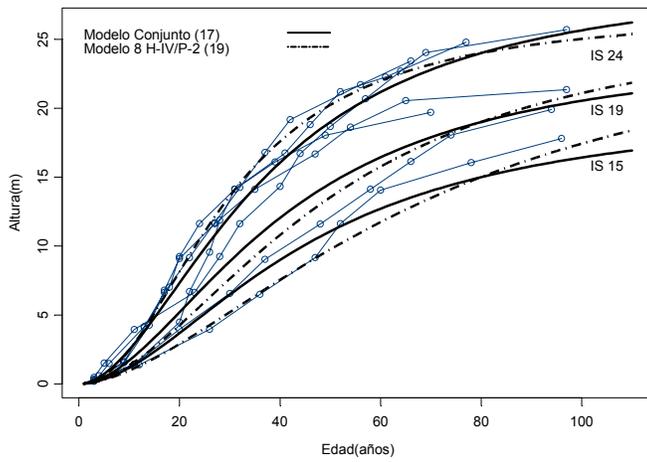


Figura 3-3-b
Suelo 2

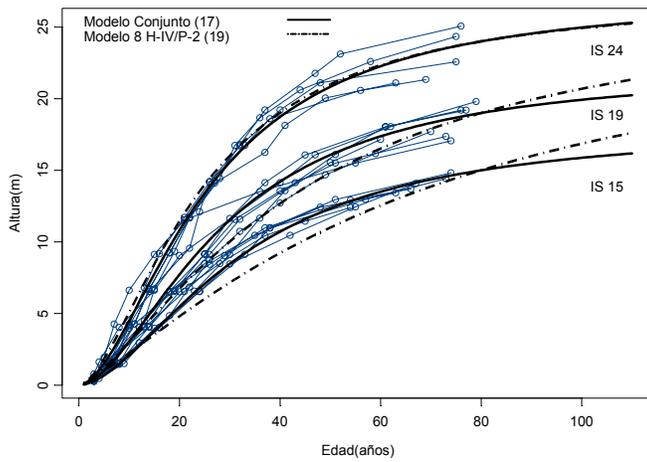


Figura 3-3-c
Suelo 3

Figura 3-3. Modelo combinado (17) vs. modelo de referencia (19)

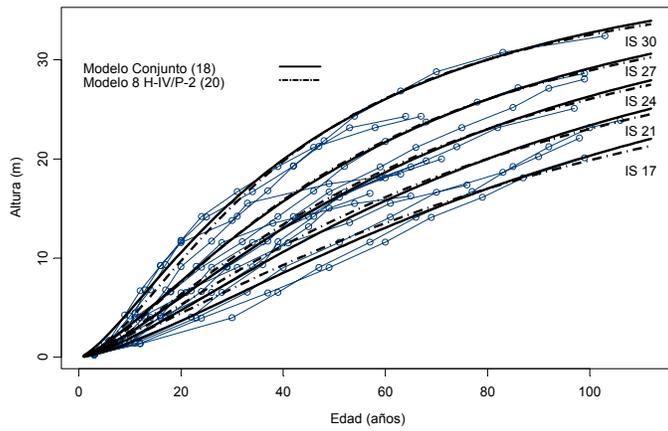


Figura 3-4-a
Suelo 1

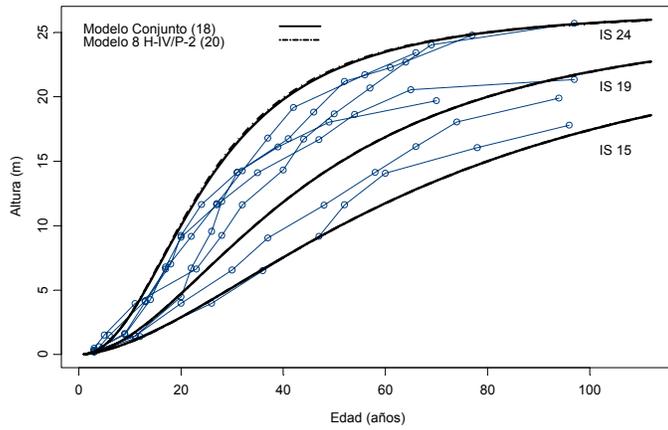


Figura 3-4-b
Suelo 2

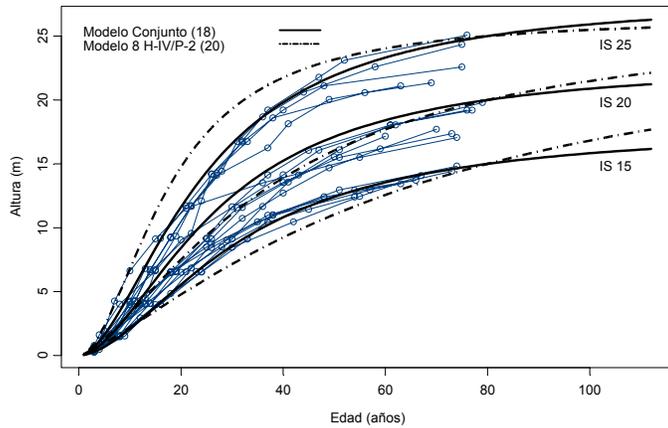


Figura 3-4-c
Suelo 3

Figura 3-4. Modelo combinado (18) vs. el modelo de referencia (20)

CAPÍTULO IV

4. CONCLUSIONES GENERALES

La presente investigación fue desarrollada con datos de árboles de *Pinus cooperi* Blanco del estado de Durango, México, en la especie que por su abundancia y buenas características tecnológicas es la que mayor volumen y valor aporta a la producción maderable en este estado. Los objetivos centrales fueron generar y demostrar metodologías prácticas en lo referente al modelaje del ahusamiento-volumen y el crecimiento en altura dominante de esta especie con el propósito de contribuir a la elaboración de mejores planes de manejo forestal. Se llegó a las siguientes conclusiones:

4.1 MODELO COMPATIBLE DE AHUSAMIENTO-VOLUMEN

El objetivo principal de esta investigación fue desarrollar un modelo compatible de ahusamiento-volumen, ajustarlo simultáneamente como un modelo de efectos mixtos (MEM) y demostrar las ventajas que este método de ajuste proporciona en relación a Mínimos Cuadrados Ordinarios. Los resultados mostraron que las modificaciones realizadas al modelo de ahusamiento Cielito 1 permitieron mejorar el ajuste, tanto del ahusamiento como del volumen comercial, teniéndose una estructura más flexible. El ajuste del sistema de cubicación compatible como un sistema con efectos mixtos no sólo es robusto, sino que permite utilizar información adicional para la cubicación del arbolado en pie, que puede ser programada para lograr cálculos más precisos sobre todo para trocería de alto valor. Adicionalmente, el ajuste mediante un modelo de efectos mixtos (MEM) fortalece el supuesto estadístico de eficiencia de los parámetros estimados al desplazar la heterocedasticidad en el volumen comercial sin complicar demasiado su estructura.

Para una valoración más precisa de las ventajas del uso de los modelos de efectos mixtos en la estimación del volumen comercial es necesario realizar pruebas de distribución de productos con datos de inventario, así como un análisis detallado del costo adicional que implica recabar información de dos diámetros más de cada árbol que presuma características de alto valor comercial.

4.2 MODELOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE

Uno de los principales intereses de este estudio fue demostrar que es posible mejorar las predicciones del crecimiento en altura dominante, incorporando variables del sitio fáciles de medir en campo y que comúnmente están disponibles en todas las unidades responsables del manejo forestal en México. Aunque en este trabajo se consideró sólo el tipo de suelo, la agrupación de los datos de edad-altura por tipo de suelo permitió identificar de manera más evidente los patrones de crecimiento de la altura dominante y, a partir de ello, ajustar modelos de Diferencia Algebraica y Diferencia Algebraica Generalizada como modelos de valor medio esperado con efectos mixtos. Las mejores ecuaciones por tipo de suelo, ajustadas simultáneamente en un mismo modelo con condiciones iniciales diferentes presentaron mejores resultados que los ajustes hechos de manera tradicional en los que no se consideraran los patrones de crecimiento atribuidos a los tipos de suelos, por lo que se recomienda incorporar la variable de suelo para aumentar la capacidad predictiva de los modelos.

Todas las ecuaciones de crecimiento en altura utilizadas son dinámicas e invariantes de la edad base, ya que pueden usar directamente alturas a cualquier edad para predecir alturas consistentes y además muestran compatibilidad entre índices de sitio y modelos de crecimiento en altura en la

misma ecuación. El ajuste de estas ecuaciones como modelos de efectos mixtos desplaza los problemas de heterocedasticidad y no hace necesario la corrección por autocorrelación.